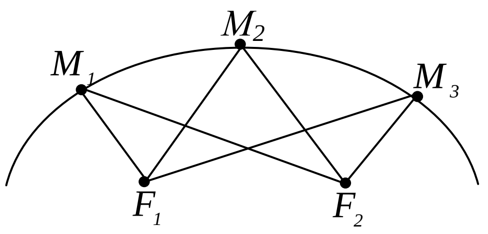
29.03.2023
Група Е- 1
Вища математика
Урок 50
Тема: Лінії другого порядку. Еліпс та його рівняння

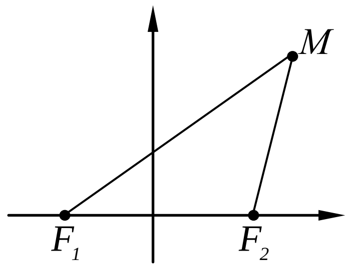
<u>Еліпсом</u> називається геометричне місце точок, сума відстаней яких до кожної з двох фіксованих точок, що називаються *фокусами*, є величина стала і рівна $2a$ (і більша ніж відстань між фокусами − $a>c$).



Нехай точки M_1, M_2, M_3, належать еліпсу, F_1 і F_2 його фокуси, то згідно визначення еліпса можна записати:

$$F_1M_1+F_2M_1=F_1M_2+F_2M_2=F_1M_3+F_2M_3=const.$$

Для виводу рівняння еліпса виберемо систему координат. За вісь Ox приймемо пряму, що проходить через фокуси F_1 і F_2, а за вісь OY пряму перпендикулярну до неї і проведену через середину F_1, F_2. Позначимо відстань Oy – між фокусами через $2c$, $F_1F_2 = 2c$, тоді координати фокусів будуть $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. Нехай точка $M(x;y)$ є довільна точка еліпса. Позначимо сталу суму відстаней точки до фокусів через $2a$, отже:



$$F_1M + F_2M = 2a \qquad (1).$$

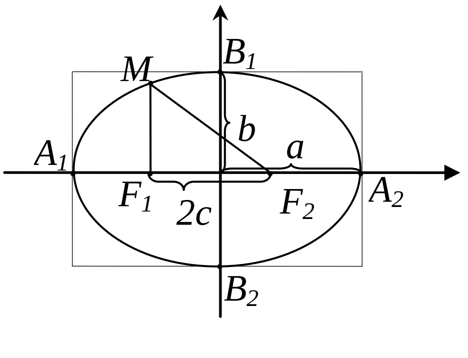
За формулою відстаней між точками можемо записати:

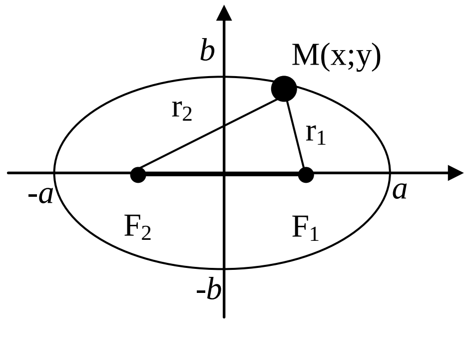
$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Знайдені відстані підставимо в рівність (1) $\sqrt{(x+C)^2 + y^2} + \sqrt{(x-C)^2 + y^2} = 2a$. Дану рівність можемо вважати рівнянням еліпса, але його можна спростити для цього звільнимося від кореня піднесенням до квадрату, зведемо подібні, введемо позначення $a^2 - c^2 = b^2$ і одержимо рівняння $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, де $b^2 = a^2 - c^2$

Отже найпростіше рівняння еліпса: $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$.





a − велика піввісь.

b − мала піввісь.
$F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$ − фокуси;
$MF_1=r_1$, $MF_2=r_2$ − фокальні радіуси.
За означенням еліпса: $r_1+r_2=2a$.

<u>Ексцентриситет еліпса</u>

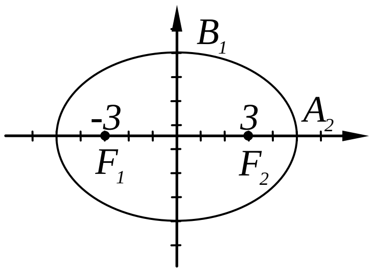
Ексцентриситетом еліпса називається відношення відстані між його фокусами до довжини великої вісі: $\varepsilon = \dfrac{2c}{2a} = \dfrac{c}{a}$.

За визначенням еліпса $0<c<a$, отже ексцентриситет еліпса менший одиниці. Ми прийняли $a^2 - c^2 = b^2$, звідки $c^2 = a^2 - b^2$ і $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ тому ексцентриситет буде $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, $\varepsilon < 1$.

Ексцентриситет характеризує форму еліпса:

а) Фокуси еліпса можуть бути розташовані на вісі Oy, тоді $b > a$, в такому випадку $a^2 = b^2 - c^2$, $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$, $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b}$.

b) Піввісі еліпса рівні $a = b$, тоді $c = 0$ і відповідно $e=0$. Рівняння еліпса приймає вигляд $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ помножимо на a^2, $x^2 + y^2 = a^2$ — це рівняння визначає коло з радіусом $R = a$. Отже коло є частинним видом еліпса, у якого піввісі рівні між собою, а ексцентриситет дорівнює нулю.



Задача №1

Для еліпса $16x^2 + 25y^2 = 400$ визначити довжину осей, координати вершин, фокусів та ексцентриситет. Відповідь проілюструвати.

Розв’язання: Поділимо обидві частини рівняння на *400:*

$\dfrac{16x^2}{400} + \dfrac{25y^2}{400} = 1$, $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

Порівнявши одержане рівняння з рівнянням еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, можемо записати $a^2 = 25$, $b^2 = 16$, звідки $a = 5$, $b = 4$. Отже велика вісь $A_1A_2 = 2a = 10$, мала вісь $B_1B_2 = 2b = 8$. Координати вершин $A_1(-5;0)$, $A_2(5;0)$, $B_1(0;4)$, $B_2(0;-4)$. Для знаходження координат фокусів обчислимо c за рівністю $a^2 - c^2 = b^2$, звідки $c^2 = a^2 - b^2$, отже $c^2 = 5^2 - 4^2 = 9$, $c = 3$. Координати фокусів $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$.

Ексцентриситет $e = \dfrac{2c}{2a} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5} = 0.6$

Задача №2.

Скласти рівняння еліпса, якщо його дві вершини $A_1(8;0)$, $A_2(-8;0)$, а фокуси $F(\pm 5;0)$.

Розв'язання: Для запису рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ слід визначити a та b. Вершини еліпса A_1, A_2 мають координати $(\pm a;0)$, та фокуси $F_{1,2}(\pm 5;0)$ порівнявши з умовою можемо записати $a=8, c=5.$ Знайдемо b з рівності $b^2=a^2-c^2,\ b^2=8^2-5^2=64-25=39$. Рівняння має вигляд $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1.$

Задача №3.

Написати рівняння еліпса, якщо сумам його півосей дорівнює 10, а відстань між фокусами $4\sqrt{5}$.

Розв'язання: Щоб записати рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ необхідно знайти a та b. З умови видно: $\begin{cases} a+b=10 \\ 2c=4\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=10 \\ 2\sqrt{a^2-b^2}=4\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=10 \\ \sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} a=10-b \\ a^2-b^2=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=10-b \\ (10-b)^2-b^2=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=10-b \\ 100-20b+b^2-b^2=20 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a=10-b \\ 20b=80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=10-4 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=4 \end{cases}$$

Рівняння еліпса має вигляд: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1.$

Задача №4.

Написати рівняння еліпса, для якого $2c=8, e=0.8$.

Розв'язання: Рівняння має вигляд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, отже необхідно знайти півосі a та b. Використаємо співвідношення між півосями a, b та фокусною відстанню $2c$: $b^2=a^2-c^2$ та визначення ексцентриситету $e=\frac{2c}{2a}$. З умови $2c=8$, тому $b^2=a^2-4^2$ і $e=\frac{8}{2a}=\frac{4}{a}=0.8$. Об'єднуємо дані рівності в систему:

$$\begin{cases} b^2=a^2-4^2 \\ \frac{4}{a}=0.8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2=5^2-16 \\ a=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=5 \end{cases}.$$

Рівняння еліпса має вид: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$