27.02.2024

Група 22

Математика (алгебра)

Урок 15-16

Тема: Застосування похідної до дослідження функцій та побудови їхніх графіків

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв’язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Коли в попередніх класах вам доводилося будувати графіки, ви зазвичай поступали так: позначали на координатній площині деяку кількість точок, які належать графіку, а потім сполучали їх. Точність побудови залежала від кількості позначених точок.

На рисунку 25.1 зображено кілька точок, які належать графіку деякої функції $y = f(x)$. Ці точки можна сполучити по-різному, наприклад так, як показано на рисунках 25.2 і 25.3.

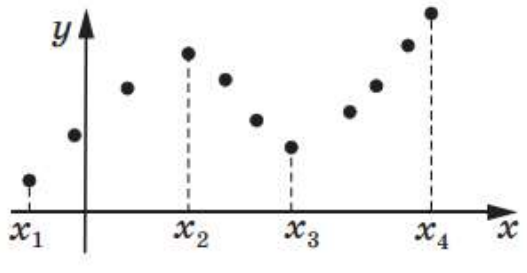


Рис. 25.1

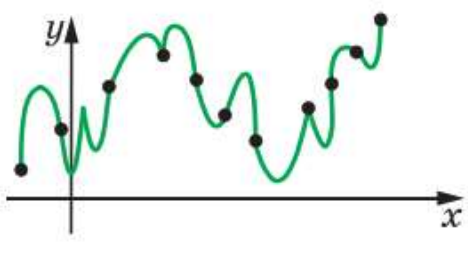


Рис. 25.2

Проте якщо знати, що функція f зростає на кожному з проміжків $[x_1; x_2]$ і $[x_3; x_4]$, спадає на проміжку $[x_2; x_3]$ і є диференційовною, то скоріше за все буде побудовано графік, зображений на рисунку 25.4.

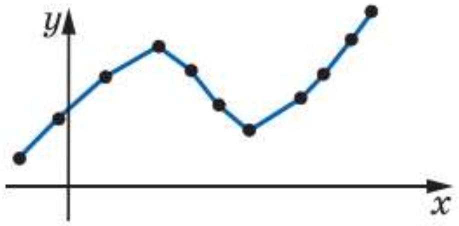


Рис. 25.3

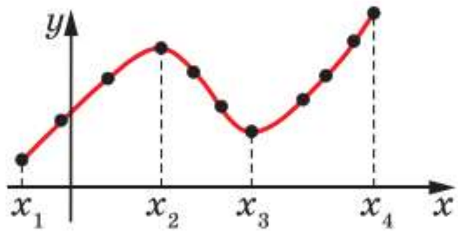


Рис. 25.4

Ви знаєте, які особливості притаманні графікам парної, непарної, періодичної функцій тощо. Узагалі, чим більше властивостей функції вдається з'ясувати, тим точніше можна побудувати її графік.

Дослідження властивостей функції проводитимемо за таким планом.

1. *Знайти область визначення функції.*
2. *Дослідити функцію на парність.*
3. *Знайти нулі функції.*
4. *Знайти проміжки зростання і спадання функції.*
5. *Знайти точки екстремуму та значення функції в точках екстремуму.*
6. *Виявити інші особливості функції (періодичність функції, поведінку функції в околах окремих важливих точок тощо).*

Зауважимо, що наведений план дослідження носить рекомендаційний характер та не є сталим і вичерпним. Під час дослідження функції важливо виявити такі її властивості, які дадуть змогу коректно побудувати графік.

1) $f(x)=3x-x^3-2$

1. Область визначення. $D(y)=R$.

2. Парність і непарність. $f(-x)=3\cdot(-x)-(-x)^3-2=$
$=-3x+x^3-2$ – ні парна, ні непарна.

3. Нулі функції. $3x-x^3-2=0$

$$-x^3+3x-2=0 \quad |\times(-1)$$
$$x^3-3x+2=0$$
$$x^3-x-2x+2=0$$
$$x(x^2-1)-2(x-1)=0$$
$$(x-1)(x(x+1)-2)=0$$
$$(x-1)(x^2+x-2)=0$$
$$x-1=0 \qquad x^2+x-2=0$$
$$x_1=1 \qquad x_2=-2 \quad x_3=1=x_1$$

4. Проміжки зростання і спадання функції.

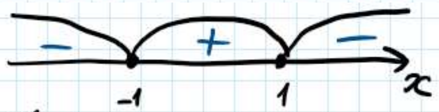
$$f'(x)=3\cdot1\cdot x^{1-1}-3\cdot x^{3-1}-0=3\cdot1-3x^2=3-3x^2$$

$3-3x^2=0$

$-3x^2=-3$

$x^2=1$

$x_1=1 \quad x_2=-1$



Функція зростає: $[-1;1]$.

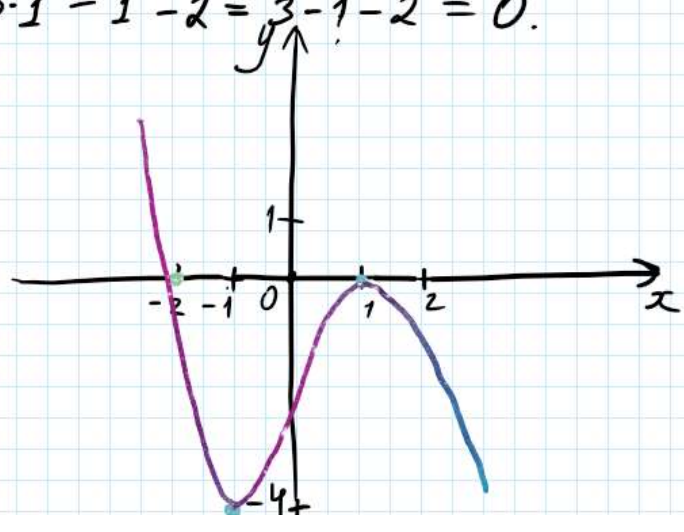
Функція спадає: $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

5. Точки екстремуму на значення функції в точках екстремуму.

$x_{min}=-1$, $f(-1)=3\cdot(-1)-(-1)^3-2=-3+1-2=-4$.

$x_{max}=1$, $f(1)=3\cdot1-1^3-2=3-1-2=0$.

6. Побудова графіку.



3) $f(x)=3x-\frac{x^3}{9}$

1. $D(y)=R$

2. $f(-x)=3\cdot(-x)-\frac{(-x)^3}{9}=-3x+\frac{x^3}{9}=-\left(3x-\frac{x^3}{9}\right)=-f(x)$ — непарна.

3. $3x-\frac{1}{9}x^3=0$

$x\left(3-\frac{1}{9}x^2\right)=0$

$x_1=0 \qquad 3-\frac{1}{9}x^2=0$

$-\frac{1}{9}x^2=-3$

$x^2=-3:\left(-\frac{1}{9}\right)$

$x^2=-3\cdot\left(-\frac{9}{1}\right)$

$x^2=27$

$x_2=\sqrt{27}=\sqrt{9\cdot3}=3\sqrt{3}\approx5 \qquad x_3=-3\sqrt{3}\approx-5$

4. $f'(x)=3\cdot1\cdot x^{1-1}-3\cdot\frac{x^{3-1}}{\cancel{9}\,3}=3-\frac{x^2}{3}$

$3-\frac{x^2}{3}=0$

$-\frac{x^2}{3}=-3$

$\frac{x^2}{3}=3$

$x^2=3\cdot3$

$x^2=9$

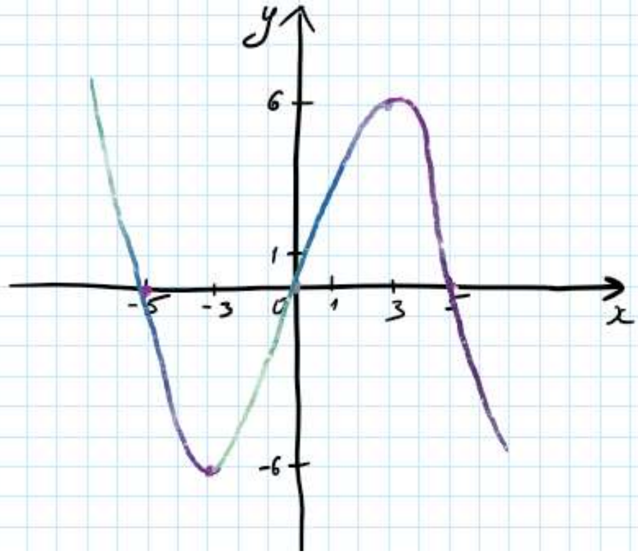
$x_1=3 \qquad x_2=-3$

Функція зростає: $[-3;3]$.
Функція спадає: $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

5. $x_{min}=-3$, $f(-3)=3\cdot(-3)-\frac{(-3)^3}{9}=-9+\frac{27}{9}=-9+3=-6$.

$x_{max}=3$, $f(3)=3\cdot3-\frac{3^3}{9}=9-\frac{27}{9}=9-3=6$.

6. Побудуємо функцію.



4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

1. $D(y) = R$

2. $f(-x) = (-x)^3 - 3\cdot(-x)^2 + 2 = -x^3 - 3x^2 + 2 = g(x)$ – ні парна, ні непарна.

3. $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

$x^3 - x^2 - 2x^2 + 2 = 0$

$x^2(x-1) - 2(x^2-1) = 0$

$x^2(x-1) - 2(x-1)(x+1) = 0$

$(x-1)(x^2 - 2(x+1)) = 0$

$(x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0$

$x - 1 = 0 \qquad x^2 - 2x - 2 = 0$

$x_1 = 1 \qquad D = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 4 + 8 = 12, \quad \sqrt{D} = \sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = 2\sqrt{3}$

$$x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2\cdot 1} = \frac{\cancel{2}(1-\sqrt{3})}{\cancel{2}} = 1 - \sqrt{3} \approx 0,7$$

$$x_3 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2\cdot 1} = \frac{\cancel{2}(1+\sqrt{3})}{\cancel{2}} = 1 + \sqrt{3} \approx 2,7$$

4. $f'(x) = 3x^{3-1} - 3\cdot 2x^{2-1} + 0 = 3x^2 - 6x$

$3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

$3x = 0 \qquad x - 2 = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$

+   0   −   2   + x

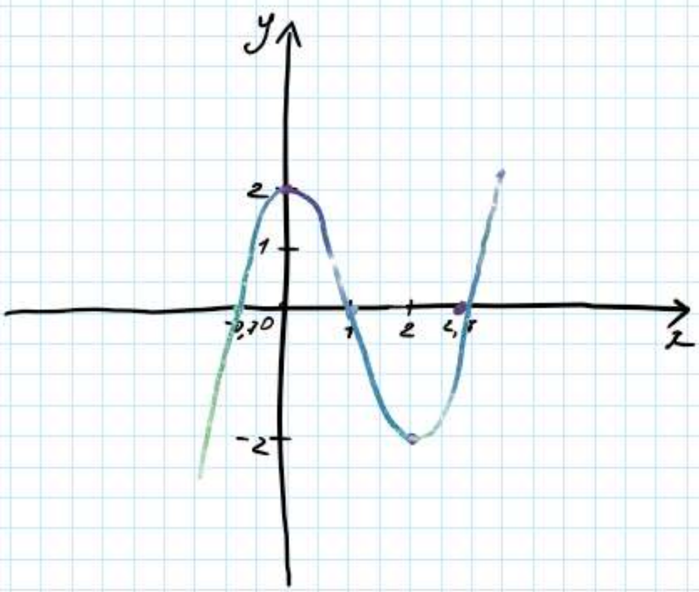
Функція зростає: $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

Функція спадає: $[0; 2]$.

5. $x_{min} = 2, \quad f(2) = 2^3 - 3\cdot 2^2 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2.$

$x_{max} = 0, \quad f(0) = 0^3 - 3\cdot 0^2 + 2 = 2.$

6. Побудуємо функцію.



Домашнє завдання: дослідити одну із даних функцій НА ВИБІР та надіслати на пошту (завдання оцінюється в 12 балів, де 12 – це ідеально оформлений правильний алгоритм дослідження та повністю коректний графік).

Дослідіть дану функцію та побудуйте її графік:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2$;
2) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$;
3) $f(x) = x - x^3$.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com