

Група Е-1

Вища математика

Урок 6

Тема: Система лінійних рівнянь. (метод Крамера)

Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера.

$$\text{Система лінійних рівнянь з двома невідомими} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

Знайдемо x_1 та x_2 методом алгебраїчного додавання для цього (1) помножимо на a_{22} , а (2) на a_{12} :
$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22} \\ a_{21}a_{12}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = b_2a_{12} \end{cases}$$
 віднімемо

$a_{11}a_{22}x_1 - a_{21}a_{12}x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$ звідки:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad (3)$$

Аналогічно:

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad (4)$$

Чисельник і знаменник (3) і (4) можна записати через визначники, тобто

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad \text{або} \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$\text{де } \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad \text{— визначник системи.}$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то x_1, x_2 — існують, розв'язок систем $(x_1; x_2)$.

$\Delta = 0$, $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$ — система розв'язків немає.

$\Delta = 0$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ — система має безліч розв'язків.

Визначник системи Δ складається з коефіцієнтів невідомих, щоб одержати Δ_1 треба в Δ замінити перший стовпець стовпцем вільних членів, а визначник Δ_2 одержуємо заміною в Δ другого стовпця стовпцем вільних членів.

Алгоритм знаходження розв'язку системи рівнянь за формулами Крамера.

1. Знайти головний визначник системи, утворений з коефіцієнтів при невідомих;
 - а) $\det A \neq 0$, виконуємо алгоритм далі;

b) $\det A = 0$, то перевірити виконання умови:

$$\begin{cases} \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = \frac{b_1}{b_2} \\ \frac{a_{21}}{a_{31}} = \frac{a_{22}}{a_{32}} = \frac{a_{23}}{a_{33}} = \frac{b_2}{b_3} \end{cases}.$$

Якщо виконується, то система має безліч розв'язків, в іншому випадку система немає розв'язків.

2. Шукаємо допоміжні визначники системи, замінивши у головному визначнику коефіцієнти при невідомому x_i стовпчиком вільних членів.
3. записати розв'язок системи у вигляді: $x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$

Приклад. Розв'язати систему методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ 4x_1 - 5x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -22; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -66; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -44$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-66}{-22} = 3; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-44}{-22} = 2$$

Приклад. Розв'язати систему методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 25, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 17. \end{cases}$$

1. Обчислимо визначник системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 7 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \cdot 3 - 4 \cdot 7 \cdot 1 - 6 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 25 & 6 & 7 \\ 17 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 12; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 25 & 7 \\ 1 & 17 & 6 \end{vmatrix} = 8; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 6 & 25 \\ 1 & 4 & 17 \end{vmatrix} = 4;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{4} = 3; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{4} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1$$

Зворотній зв'язок:

vitasergiivna1992@gmail.com

!!! у повідомленні з д/з не забуваємо вказувати прізвище, групу і дату уроку.