Група Е-1
Вища математика
Урок 5
Тема: Система лінійних рівнянь

Основні поняття теорії СЛР.

Системою m лінійних рівнянь із n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$, або ***лінійною системою,*** називають систему рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Числа a_{ij} називаються ***коефіцієнтами***, а числа b_i − вільними числами системи.

Розв’язати систему рівнянь означає знайти всі її розв’язки або довести, що їх не має.

Розв’язком системи рівнянь з n невідомими є n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які перетворюють кожне рівняння системи правильну числову рівність, тобто задовольняють її.

Система називається ***сумісною***, якщо вона має принаймні один розв’язок, і ***несумісною***, якщо вона не має розв’язків.

З коефіцієнтів при невідомих складається матриця:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ − називається ***основною*** матрицею, а матрицю

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ − називають ***розширеною матрицею*** системи.

Вільні члени і невідомі записуються у вигляді матриць стовпців:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Розв’язування системи лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці

Систему можна записати через добуток матриць

$$\boldsymbol{AX=B} \qquad (2)$$

Такий запис системи називається *матричною* формою запису системи (1). Або

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Вважаємо $det\,A \neq 0$, тоді для неї існує A^{-1} помножимо обидві частини (2) на A^{-1}, тоді $A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1}B$.

Використовуючи сполучний закон добутку матриць маємо $(A \cdot A^{-1})X = A^{-1}B$, звідки $EX = A^{-1}B$, але $EX = X$, тоді $X = A^{-1}B$.

Алгоритм розв'язку матричного рівняння (3):

1. Знайти обернену матрицю A^{-1};
2. Обчислити добуток оберненої матриці A^{-1} на матрицю — стовпець B із вільних членів;
3. Користуючись рівністю матриць записуємо відповідь.

<u>*Приклад:*</u> Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

Складаємо матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ AX=B$$

Перевіримо рівність Δ нулю.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 15 - 24 - 27 + 20 + 16 = -6 \neq 0$$

Щоб знайти обернену матрицю, знаходимо A_{ij}:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 22; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -14;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -17; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 10$$

$$A = \begin{pmatrix} 22 & 2 & -14 \\ 1 & -1 & -2 \\ -17 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

Транспонуємо одержану матрицю і ділимо на (-6) і це буде обернена матриця A^{-1}.

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 22 & 1 & -17 \\ 2 & -1 & -1 \\ -14 & -2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{17}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Знаходимо добуток $A^{-1}B$

$$\begin{pmatrix} -\frac{11}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{17}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\frac{11}{3}) \cdot 1 & (-\frac{1}{6}) \cdot 4 & \frac{17}{6} \cdot 1 \\ (-\frac{1}{3}) \cdot 1 & \frac{1}{6} \cdot 4 & \frac{1}{6} \cdot 1 \\ \frac{7}{3} \cdot 1 & \frac{1}{3} \cdot 4 & (-\frac{5}{3}) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Отже $x_1=1.5$, $x_2=0.5$, $x_3=2$.

Домашнє завдання:

Зворотній зв`язок:

vitasergiivna1992@gmail.com

!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.