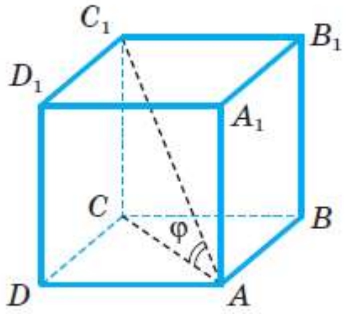
**23.01.2024**
**Група 21**
**Математика (геометрія)**
**Урок 13-14**
**Тема:** Вимірювання кутів у просторі
**Мета:**

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

**Матеріали до уроку:**

**Кут між прямою і площиною.** Що розуміють під кутом між прямою і площиною?

Якщо пряма паралельна площині, то вважають, що кут між такою прямою і площиною дорівнює 0°. Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між ними дорівнює 90°. У решті випадків кутом між прямою і площиною називають кут між прямою та її ортогональною проекцією на площину.



Мал. 314

До кута між прямою і площиною близьке поняття кута між похилою і площиною.

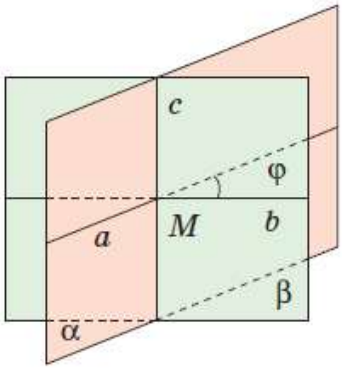
> **!** **Кутом між похилою і площиною** називають кут між похилою та її проекцією на площину.

Йдеться про прямокутну (ортогональну) проекцію. Якщо $\varphi$ — кут між прямою і площиною, то $0° \le \varphi \le 90°$; якщо $\varphi$ — кут між похилою і площиною, то $0° < \varphi < 90°$.

Можна довести, що кут між похилою і площиною найменший з усіх кутів, які похила утворює з прямими, проведеними на площині через основу похилої.

**Кут між площинами.** Ви вже знаєте з п. 30, як знайти кут між площинами. Якщо дві площини паралельні, то вважають, що кут між ними дорівнює 0°. Якщо площини $\alpha$ і $\beta$ перетинаються по прямій $c$, то, щоб визначити кут між цими площинами, у кожній з них через довільну точку $M$ прямої $c$ можна провести прямі $a$ і $b$, перпендикулярні до прямої $c$ (мал. 318).

Кут між прямими $a$ і $b$ приймають за кут між даними площинами $\alpha$ і $\beta$. Можна довести, що міра цього кута $\varphi$ не залежить від вибору точки $O$ на прямій $c$. Кут між двома площинами, як і між двома прямими, знаходиться в межах від 0° до 90°.



Мал. 318

Якщо кут між двома площинами дорівнює 90°, то площини перпендикулярні.

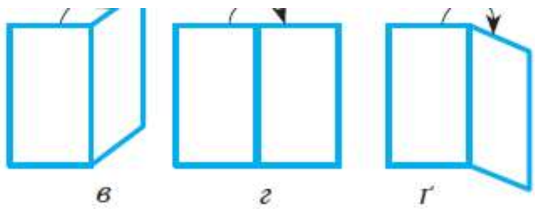
Якщо дві площини перетинаються, то вони весь простір поділяють на 4 частини, які називають двогранними кутами.

Півплощини, які обмежують двогранний кут, називають його гранями, а їх спільну пряму — ребром двогранного кута (мал. 319). Фігуру, утворену двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує, також називають двогранним кутом.

!

**Двогранним кутом** називають частину простору, обмежену двома півплощинами, які виходять з однієї прямої.

Кут, утворений перетином двогранного кута з площиною, перпендикулярною до його ребра, називають *лінійним кутом* даного двогранного кута. Будь-які два лінійні кути двогранного кута рівні (мал. 320). Тому двогранні кути можна характеризувати відповідними лінійними кутами. Якщо, наприклад, лінійний кут деякого двогранного кута дорівнює 60°, то кажуть, що це — двогранний кут 60°. Двогранний кут називають гострим, прямим, тупим, розгорнутим чи більшим від розгорнутого залежно від того, чи є його лінійний кут гострим, прямим, тупим, розгорнутим чи більшим від розгорнутого (мал. 321).



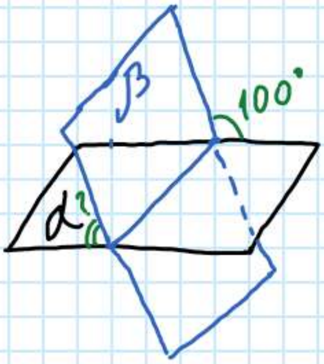
Мал. 321

**1182.** На малюнку 314 $AC_1$ — діагональ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Під яким кутом нахилена діагональ куба до кожної його грані?

Розв'язання

Якщо провести площину $(ACC_1)$, то побачимо, що $ACC_1A_1$ – квадрат, а $AC$ – діагональ квадрата. Діагоналі квадратів є бісектрисами відповідних кутів, а тому $\angle CAC_1 = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

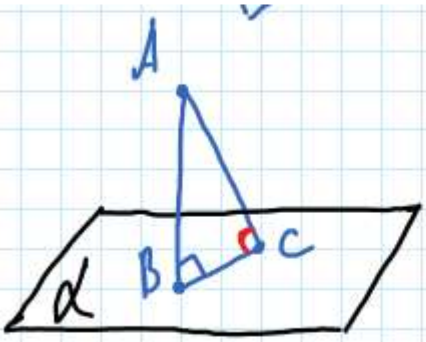
**1186.** Кут між двома площинами дорівнює 100°. Укажіть міру меншого з утворених двогранних кутів.




Розв'язання

Дані кути є суміжними, а отже в сумі маємо отримати 180°. Тому $180° - 100° = 80°$.

**1191.** Похила вдвічі довша за її проекцію на площину. Знайдіть кут між похилою і площиною.




Дано: $AB \perp \alpha$, $AC$ — похила, $AC = 2BC$.

Знайти: $\angle ACB$.

Розв'язання

Розглянемо $\triangle ABC$. Якщо гіпотенуза $AC$ вдвічі довша за катет $BC$, то кут навпроти цього катета 30°. Отже, $\angle BAC = 30°$.

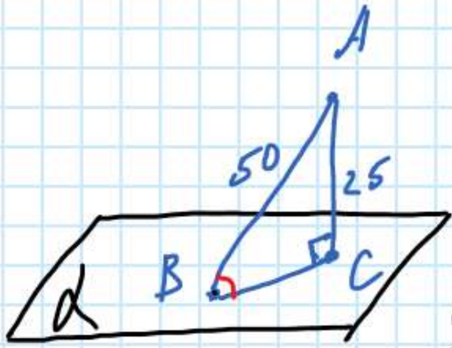
$\angle BAC + \angle ACB = 90°$ за властивістю гострих кутів прямокутного трикутника, а отже

$\angle ACB = 90° - 30° = 60°$.

Відповідь: $\angle ACB = 60°$.

**1195.** Довжина похилої $AB$ дорівнює 50 см, а точка $A$ віддалена від площини на 25 см. Знайдіть кут між похилою і площиною.

**1196.** Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних площин під кутом $\alpha$, то і другу площину вона перетинає під кутом $\alpha$.



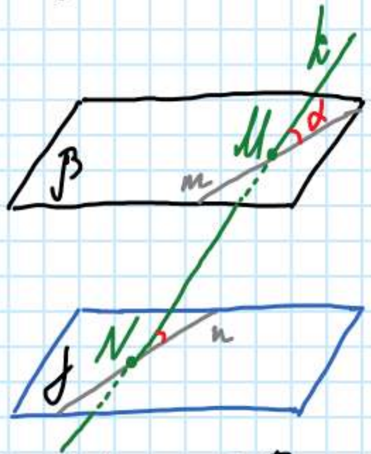

Дано: $AB$ - похила, $AB = 50$ см, $AC \perp \alpha$, $AC = 25$ см.

Знайти: $\angle BAC$.

Розв'язання

Розглянемо $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$). У ньому катет $AC = \frac{AB}{2}$, тобто половині гіпотенузи, а отже $\angle ABC = 30°$.

Відповідь: $\angle ABC = 30°$.



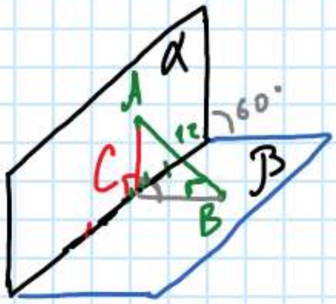

Дано: $\beta \parallel \gamma$, $m \subset \beta$, $n \subset \gamma$, $k \cap \beta = M$, $k \cap \gamma = N$, $\angle(k, m) = \alpha$.

Довести: $\angle(k, n) = \alpha$

Доведення

Оскільки $m \subset \beta$, а $n \subset \gamma$, то $m \parallel n$ за властивістю паралельності площин. Тоді $\angle(k, m)$ та $\angle(k, n)$ — внутрішні різносторонні при $m \parallel n$ та січній $k$. А тому $\angle(k, m) = \angle(k, n) = \alpha$.

**1201.** Дано двогранний кут 60°. Точка $A$ однієї його грані віддалена на 12 см від іншої. Знайдіть відстань від точки $A$ до ребра даного двогранного кута.



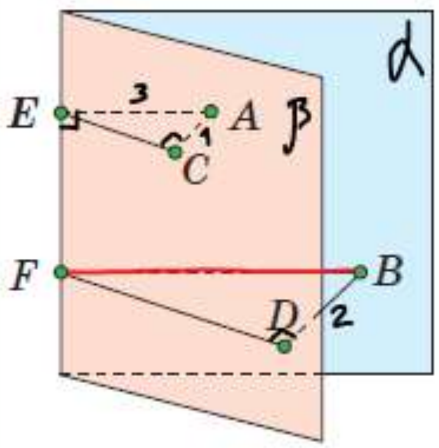

Дано: $\angle(\alpha, \beta) = 60°$,
$A \in \alpha$, $B \in \beta$, $AB = 12$ см,
$AC \perp \beta$.
Знайти: $AC$.

Розв'язання

$\angle ACB = 60°$, $AB \perp \beta$. Тоді $AC = \frac{AB}{\sin\angle ACB} = \frac{12}{\sin 60°} =$
$= \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{\cancel{24}^{8}\sqrt{3}}{\cancel{3}_{1}} = 8\sqrt{3}$ см

Відповідь: $AC = 8\sqrt{3}$ см.

**1212.** На одній грані двогранного кута дано дві точки $A$ і $B$ (мал. 327). З них опущено перпендикуляри на другу грань: $AC = 1$ дм, $BD = 2$ дм та на ребра: $AE = 3$ дм і $BF$. Знайдіть $BF$.




Мал. 327

Дано: $A \in \alpha$, $B \in \beta$,
$AC \perp \beta$, $AC = 1$ дм,
$BD \perp \beta$, $BD = 2$ дм,
$AE \perp EF$, $AE = 3$ дм.
Знайти: $BF$

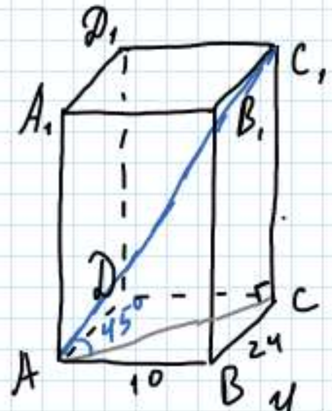
Розв'язання

Розглянемо $\triangle AEC$ і $\triangle BFD$.
В них: $\angle C = \angle D = 90°$;
$\angle AEC = \angle BFD$ як лінійні кути двогранного кута. А отже $\triangle AEC \sim \triangle BFD$ за двома кутами.
Тому $\frac{AC}{BD} = \frac{AE}{BF}$.

$\frac{1}{2} = \frac{3}{BF} \Rightarrow BF = \frac{3 \cdot 2}{1} = 6$ дм

Відповідь: $BF = 6$ дм.

**1221.** Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з площиною його основи кут 45°. Сторони основи дорівнюють 10 см і 24 см. Визначте висоту паралелепіпеда.



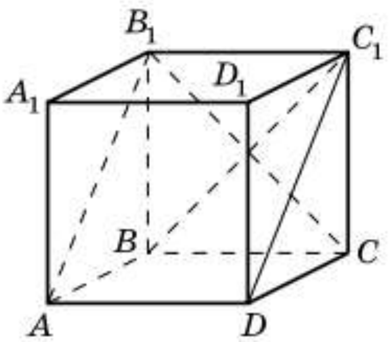

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $\angle C_1AC = 45°$,
$AB = 10$ см, $BC = 24$ см.
Знайти: $CC_1$

Розв'язання

Розглянемо $\triangle AC_1C$ ($\angle C = 90°$).
У ньому $\angle C_1AC = 45°$, а отже
$\angle AC_1C = 90° - \angle C_1AC = 90° - 45° = 45°$. Тоді $\triangle AC_1C$ – рівнобедрений,
тому $AC = CC_1$.
Розглянемо $\triangle ACB$ ($\angle B = 90°$). У ньому:
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{576+100} = \sqrt{676} = 26$ см
$CC_1 = AC = 26$ см
Відповідь: $CC_1 = 26$ см.

**Домашнє завдання:** розв'язати задачі (в зошиті):

1) Із точки до площини проведено похилу завдовжки 16 см. Знайдіть кут, який утворює похила з площиною, якщо перпендикуляр, проведений з точки до площини, дорівнює $8\sqrt{2}$ см.
2) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (див. рис.). Знайти кути, які утворює пряма $AB$ з прямими $B_1C$ і $D_1C_1$.




**Зворотній зв'язок:**

**E-mail** t.anastasia.igorivna@gmail.com