**Група** М-1
**Вища математика**
**Урок** 20
**Тема:** Розклад вектора за базисом.
**Мета:**
Навчальна – Формування понять базис вектора, скалярний добуток; вивчення способів використання даних понять
Розвивальна – розвивати просторову уяву, вміння проводити аналогії, порівняння;
Виховна – виховувати акуратність, зацікавленість у пізнанні нового.

**Матеріали до уроку:**

**БАЗИС**

Базисом простору називають таку систему векторів, що всі інші вектори простору можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів, що входять в базис.
На практиці це все реалізовується досить просто. Базис, як правило, перевіряють на площині або в просторі, а для цього потрібно знайти визначник матриці другого, третього порядку, складений з координат векторів. Нижче схематично записані умови, за яких вектори утворюють базис

$$\vec{e}_1(x_1;y_1),\vec{e}_2(x_2;y_2)\Rightarrow\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\neq 0.$$

$$\vec{e}_1(x_1;y_1;z_1),\vec{e}_2(x_2;y_2;z_2),\vec{e}_3(x_3;y_3;z_3)\Rightarrow\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

Щоб розкласти вектор b за базисними векторами
e[1],e[2]...,e[n], необхідно знайти коефіцієнти x[1], ..., x[n], при яких лінійна комбінація векторів e[1],e[2]...,e[n] дорівнює вектору b:
x1*e[1]+ ... + x[n]*e[n] = b.
Для цього векторне рівняння слід перетворити до системи лінійних рівнянь і знайти розв'язки. Це також достатньо просто реалізувати.
Знайдені коефіцієнти x[1], ..., x[n], називаються координатами вектора b в базисі e[1],e[2]...,e[n].
Перейдемо до практичної сторони теми.
**Завдання 1.** Перевірити, чи утворюють вектори a1, a2 базис на площині
1) a1 (3; 5), a2 (4; 2)
Розв'язання: Складаємо визначник з координат векторів

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 4 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 2-5\cdot 4=6-20=-14.$$

Визначник не дорівнює нулю, отже вектори лінійно незалежні, а значить утворюють базис.
2) a1 (2; -3), a2 (5;-1)
Розв'язання: Обчислюємо детермінант складений з векторів

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & -1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)-(-3)\cdot 5=-2+15=13.$$

Визначник рівний 13(не рівний нулю), отже вектори a1, a2 є базисом на площині.

**Завдання 2.** Показати, що вектори a1, a2, a3 утворюють базис тривимірного векторного простору, та розкласти вектор b за цим базисом (при розв'язуванні системи лінійних алгебраїчних рівнянь використати метод Крамера).
1) a1 (3; 1; 5), a2 (3; 2; 8), a3 (0; 1; 2), b (−3; 1; 2).
Розв'язання: Спочатку розглянемо систему векторів a1, a2, a3 та перевіримо чи визначник матриці A

$$A=\begin{pmatrix}3&1&5\\3&2&8\\0&1&2\end{pmatrix}$$

побудованої на векторах відмінний від нуля. Матриця містить один нульовий елемент, тому детермінант доцільніше обчислювати розкладом за першим стовпцем або третім рядком.

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&1&5\\3&2&8\\0&1&2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2&8\\1&2\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&5\\1&2\end{vmatrix}=$$

$$=3(2\cdot2-8\cdot1)-3(1\cdot2-5\cdot1)=-12+9=-3$$

Визначник відмінний від нуля, отже вектори a1, a2, a3 лінійно незалежні. Згідно означення вектори утворюють базис в E3. Запишемо розклад вектора b за базисом

$$\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}3\\2\\8\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}x_3$$

Вектори рівні, коли їх відповідні координати рівні. Тому з векторного рівняння одержимо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases}3x_1+3x_2=-3;\\x_1+2x_2+x_3=1;\\5x_1+8x_2+2x_3=2.\end{cases}$$

Розв'яжемо СЛАР методом Крамера . Для цього запишемо систему рівнянь у вигляді

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&3&0&-3\\1&2&1&1\\5&8&2&2\end{array}\right)$$

Головний визначник СЛАР завжди рівний визначнику складеному з векторів базису

$$\Delta=3\cdot2\cdot2+3\cdot1\cdot5+0\cdot1\cdot8-(0\cdot2\cdot5+3\cdot1\cdot2+3\cdot1\cdot8)=$$

$$=12+15+0+0-6-24=-3.$$

Тому на практиці його не обчислюють двічі. Для знаходження допоміжних визначників ставимо стовпець вільних членів на місце кожного стовпця головного визначника. Визначники обчислюємо за правилом трикутників

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-3&3&0\\1&2&1\\2&8&2\end{vmatrix}=-3\cdot2\cdot2+3\cdot1\cdot2+0\cdot1\cdot8-$$

$$-(0\cdot2\cdot2+3\cdot1\cdot2+(-3)\cdot1\cdot8)=-12+6-6+24=12;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3&-3&0\\1&1&1\\5&2&2\end{vmatrix}=3\cdot1\cdot2+(-3)\cdot1\cdot5+0\cdot1\cdot2-$$

$$-(0\cdot1\cdot5+(-3)\cdot1\cdot2+3\cdot1\cdot2)=6-15+6-6=-9;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot 2+3\cdot 1\cdot 5+(-3)\cdot 1\cdot 8-$$

$$-((-3)\cdot 2\cdot 5+3\cdot 1\cdot 2+3\cdot 1\cdot 8)=12+15-24+30-6-24=3.$$

Підставимо знайдені визначники у формулу Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{-3} = -4;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-9}{-3} = 3;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{3}{-3} = -1.$$

Отже, розклад b за базисом наступний b=-4a1+3a2-a3. Координатами вектора b у базисі a1, a2, a3 будуть (-4,3, 1).

## СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК

Скалярним добутком двох векторів a, b $\overline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n),\ \ \overline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ називають число, що дорівнює сумі попарних добутків координат векторів з кожної осі, тобто

$$(\overline{a}, \overline{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n.$$

З формули бачимо, що знаходження скалярного добутку – це саме просте заняття, яке може виконати будь-який школяр.

Для прикладу, якщо маємо два вектори в просторі з координатами

$$\overline{a} = (3;1;5); \overline{b} = (5;-4;-1)$$

то їх скалярний добуток рівний

$$(\overline{a}, \overline{b}) = 3\cdot 5 + 1\cdot(-4) + 5\cdot(-1) = 6.$$

Згідно другого означення, скалярний добуток двох векторів рівний числу, яке отримують множенням довжин векторів (їх модулів) на косинус кута між ними

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos(\varphi), \qquad (0 \le \varphi \le \pi).$$

Дане означення використовують не стільки для знаходження скалярного добутку, як значення косинуса кута і вже з таблиць – кута між векторами. З означення отримують зручну формулу для обчислення кута між векторами

$$\cos(\varphi) = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}, \quad (0 \le \varphi \le \pi)$$

або в координатній формі

$$\cos(\varphi) = \frac{a_x b_c + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

**Приклади.**

Задано вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$. Обчислити їх скалярний добуток, якщо

1) $\overline{a} = (2;1;0); \overline{b} = (2;-2;-3);$

2) $\overline{a} = (-1;7;2); \overline{b} = (3;2;-5);$

3) $\overline{a}=(-2;1;3);\overline{b}=(4;5;6);$

4) $\overline{a}=(6;3;1);\overline{b}=(2;-2;4);$

5) $\overline{a}=(7;-7;2);\overline{b}=(1;-3;9);$

6) $\overline{a}=(2^3;8;4);\overline{b}=(-4;2^2;16);$

7) $\overline{a}=(e^2;e^3;e^4);\overline{b}=(-3e^2;5e;9).$

Розв'язання. Виконаємо обчислення згідно першого означення.

1) $(\overline{a},\overline{b})=2\cdot 2+1\cdot(-2)+0\cdot(-3)=0;$

2) $(\overline{a},\overline{b})=-1\cdot 3+7\cdot 2+2\cdot(-5)=1;$

3) $(\overline{a},\overline{b})=-2\cdot 4+1\cdot 5+3\cdot 6=15;$

4) $(\overline{a},\overline{b})=6\cdot 2+3\cdot(-2)+1\cdot 4=10;$

5) $(\overline{a},\overline{b})=7\cdot 1-7\cdot(-3)+2\cdot 9=4;$

6) $(\overline{a},\overline{b})=2^3\cdot(-4)+8\cdot 2^2+4\cdot 16=-2^5+2^5+2^6=64;$

7) $(\overline{a},\overline{b})=e^2\cdot(-3e^2)+e^3\cdot 5e+e^4\cdot 9=11e^4.$

**Домашнє завдання:**

1. Довести, що вектори a(1,3), b(2,5) утворюють базис
2. Довести, що вектори $\vec{p}=$ (0,1,2), $\vec{q}=$ (1,0,1), $\vec{r}=$ (-1,2,4) утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=$ (-2,4,7) за цим базисом.
3. Установити відповідність між векторами (1–4) та їх скалярними добутками

| | |
|---|---|
| **1.** $\overrightarrow{a_1}(1;5;14)$, $\overrightarrow{b_1}(3;4;-1)$ | **А.** 7 |
| **2.** $\overrightarrow{a_2}(3;0;-4)$, $\overrightarrow{b_2}(5;-7;2)$ | **Б.** 9 |
| **3.** $\overrightarrow{a_3}(4;-2;9)$, $\overrightarrow{b_3}(-3;1;4)$ | **В.** -6 |
| **4.** $\overrightarrow{a_4}(5;-4;-1)$, $\overrightarrow{b_4}(3;4;5)$ | **Г.** 22 |
| | **Д.** 5 |

**Зворотній зв'язок:**

E-mail: **vitasergiivna1992@gmail.com**