21.03.2023
Група Е- 1
Вища математика
Урок 45-46
Тема:Лінійні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

Лінійні диференціальні рівняння розглянутого типу – це рівняння, які можна привести до виду

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

де p й q – задані постійні коефіцієнти, $f(x)$ – деяка функція.

Якщо $f(x) = 0$, то рівняння називається *однорідним диференціальним рівнянням 2*-го порядку з постійними коефіцієнтами

$$y'' + py' + qy = 0,$$

Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння називається *неоднорідним диференціальним рівнянням 2*-го порядку з постійними коефіцієнтами.

Для знаходження розв'язків розглянутих лінійних диференціальних рівнянь необхідно вивчити допоміжне характеристичне рівняння виду $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, коефіцієнти якого визначаються коефіцієнтами вихідного диференціального рівняння. Два корені λ_1 й λ_2 характеристичного рівняння визначають явний вид шуканого розв'язку.

Розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами

Щоб розв'язати лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами,

$$y'' + py' + qy = 0,$$

слід замість y підставити 1, замість y' – допоміжну змінну λ, а замість y'' – підставити λ^2. Одержимо квадратне рівняння, яке називається *характеристичним рівнянням* даного диференціального рівняння:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Корені цього рівняння наступні

$$\lambda_1 = \frac{-q + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-q - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Знайдемо *дискримінант* цього квадратного рівняння

$$D = p^2 - 4q.$$

Далі розглянемо 3 випадку.

1. $D > 0$.

Характеристичне рівняння має два різні дійсні корені λ_1 й λ_2. У цьому випадку загальний розв'язок розглянутого диференціального рівняння має вигляд

$$y(x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x),$$

де C_1 й C_2 – довільні постійні.

2. $D = 0$.

Характеристичне рівняння має один дійсний корінь k подвійної кратності. Загальний розв'язок розглянутого диференціального рівняння має вигляд

$$y(x) = C_1 \exp(\lambda x) + C_2 x \exp(\lambda x),$$

де C_1 й C_2 – довільні постійні.

3. $D < 0$.

Характеристичне рівняння не має дійсного кореня, а має два комплексні корені

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \qquad \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

Розв'язок диференціального рівняння в цьому випадку визначається числами α й β:

$$y(x) = C_1 \exp(\alpha x)\sin(\beta x) + C_2 \exp(\alpha x)\cos(\beta x),$$

де C_1 й C_2 – довільні постійні.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 7y' + 12y = 0.$$

Розв'язок. Дане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку з постійними коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0.$$

Дискримінант $D = 49 - 48 = 1 > 0$. Знайдемо коріння характеристичного рівняння

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2}, \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 3.$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд $y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{3x}$.

Приклад 2. Знайти приватний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

задовольняюче початковим умовам $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Розв'язок. Дане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку з постійними коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - \lambda + 4 = 0.$$

Дискримінант $D = 16 - 16 = 0$. Отже, рівняння має один корінь $\lambda = 2$ подвійної кратності. Тому загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Щоб знайти частковий розв'язок, скористаємося початковими умовами. Спочатку використовуємо умову $y(0) = 1$, тобто замість x підставимо 0, а замість y підставимо 1. Одержимо рівняння $y(x) = C_1 + C_2 0 = C_1$. Отже, $C_1 = 1$.

Щоб скористатися другою початковою умовою, знайдемо похідну y':

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} + C_2 \left(e^{2x} + 2x e^{2x}\right).$$

За умовою $y'(0) = 0$, тобто підставивши $x = 0$, повинні одержати $y' = 0$:

$$0 = 2C_1 e^0 + C_2 \left(e^0 + 0\right) = 2C_1 + C_2.$$

Отже, $C_2 = -2C_1 = -2$.

Отже, потрібний частковий розв'язок виходить при $C_1 = 1$ й $C_2 = -2$. Тому воно має вигляд

$$y(x) = e^{2x} - x e^{2x}.$$