16.01.2024

Група 21

Математика (алгебра)

Урок 11-12

Тема: Екстремуми функції

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

1. Екстремуми функції

Досліджуючи поведінку функції поблизу деякої точки, зручно користуватися поняттям *околу точки*.

! ***Околом точки*** x_0 **називають будь-який проміжок, що містить цю точку.**

! **Точку** x_0 **називають** ***точкою максимуму*** **функції** $y = f(x)$, **якщо для всіх** x **з деякого околу точки** x_0 **справджується нерівність** $f(x_0) > f(x)$. **Значення функції в точці максимуму називають** ***максимумом функції.***

! **Точку** x_0 **називають** ***точкою мінімуму*** **функції** $y = f(x)$, **якщо для всіх** x **з деякого околу точки** x_0 **справджується нерівність** $f(x_0) < f(x)$. **Значення функції в точці мінімуму називають** ***мінімумом функції.***

Т **Теорема Ферма** (необхідна умова екстремуму). **Якщо точка** x_0 **є точкою екстремуму функції** $f(x)$ **і в цій точці існує похідна, то вона дорівнює нулю:**

$$f'(x_0) = 0.$$

Т е о р е м а (достатня умова екстремуму). **Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 та:**

1) $f'(x) > 0$ на проміжку $(a; x_0)$ і $f'(x) < 0$ на проміжку $(x_0; b)$, то x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$;

2) $f'(x) < 0$ на проміжку $(a; x_0)$ і $f'(x) > 0$ на проміжку $(x_0; b)$, то x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$.

Таким чином, проміжки зростання, спадання та екстремуми функції пов'язані між собою. Тому *для знаходження екстремумів функції* можна застосувати такий алгоритм:

1) Знайти область визначення функції.
2) Знайти похідну функції.
3) Знайти критичні точки функції.
4) Позначити знайдені критичні точки на області визначення функції та знайти знак похідної на кожному з отриманих проміжків.
5) Для кожної критичної точки за знаком похідної на проміжках зліва і справа від неї визначити, чи є вона точкою екстремуму, і якою саме, максимуму чи мінімуму. Записати результат.

4. Задачі на пошук точок екстремуму та екстремумів функції

Розглянемо кілька задач.

Задача 1. Знайти точки екстремуму функції

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3.$$

Р о з в ' я з а н н я. Скористаємося вище згаданим алгоритмом. 1) $D(y) = R$.

2) $y' = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$.

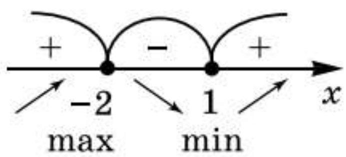
3) $D(y') = R$, $y' = 0$, маємо рівняння: $(x - 1)(x + 2) = 0$, звідки $x_1 = 1$; $x_2 = -2$ – критичні точки.

4) Позначимо критичні точки на $D(y)$ (числовій осі) і визначимо знак похідної на кожному з отриманих проміжків:

$y'(-5) = (-5 - 1)(-5 + 2) > 0$, тобто $y' > 0$ на $(-\infty; 2)$;

$y'(0) = (0 - 1)(0 + 2) < 0$, тобто $y' < 0$ на $(-2; 1)$;

$y'(2) = (2 - 1)(2 + 2) > 0$, тобто $y' > 0$ на $(1; +\infty)$.



Мал. 22.8

Результат зображено на малюнку 22.8.

5) Отже, $x_{\max} = -2$; $x_{\min} = 1$.

В і д п о в і д ь. $x_{\max} = -2$; $x_{\min} = 1$.

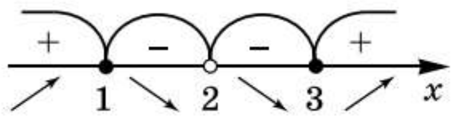
Задача 2. Знайти екстремуми функції $y = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$.

Розв'язання. 1) $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

2) $y' = \dfrac{2x(x-2) - 1(x^2 - 3)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$.

3) $y' = 0$, тобто $\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 3$ – критичні точки.

4) Позначимо критичні точки на області визначення функції та з'ясуємо знак похідної на кожному з отриманих проміжків (мал. 22.9).



Мал. 22.9

5) Отже, $x_{max} = 1$; $x_{min} = 3$ – точки екстремуму.

Тоді $y_{max} = y(1) = \dfrac{1^2 - 3}{1 - 2} = 2$; $y_{min} = y(3) = \dfrac{3^2 - 3}{3 - 1} = 3$.

Відповідь: $y_{max} = y(1) = 2$; $y_{min} = y(3) = 3$.

Домашнє завдання: розв'язати задачі (в зошиті):

1)

Знайдіть точки екстремуму та екстремуми функції (22.9–22.10):

1) $y = 2x^3 + 6x^2 - 18x$; 2) $y = 2 + 12x + 9x^2 - 10x^3$;

3) $y = x^3 - 3x$; 4) $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com