12.03.2024

Група 26

Математика (алгебра)

Урок 21-22

Тема: Показникова функція та її властивості

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Розглянемо функцію $f(x) = 2^x$, де x — раціональне число, тобто областю визначення функції f є множина $\mathbb{Q}$.

На рисунку 1.1 позначено точки графіка функції f, які відповідають деяким цілим значенням x. Обчислимо значення функції $f(x) = 2^x$ при деяких дробових значеннях x. Наприклад, при $x = \frac{1}{2}$ маємо: $2^x = 2^{\frac{1}{2}} = 1{,}41\ldots$. Якщо до точок, зображених на рисунку 1.1, додати точки графіка функції f, які відповідають, наприклад, значенням $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$, то отримаємо множину точок, зображену на рисунку 1.2.

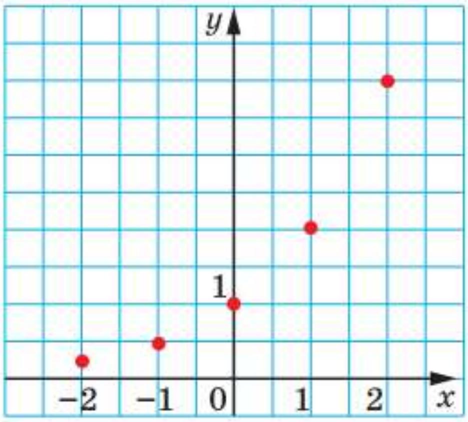


Рис. 1.1

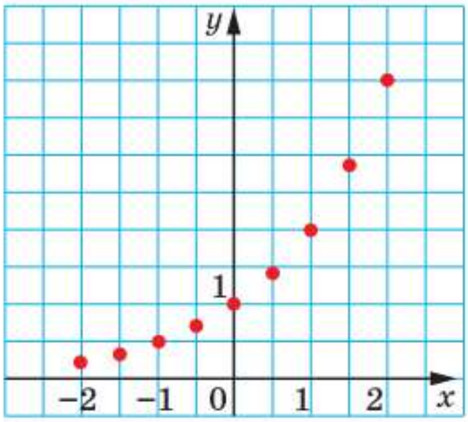


Рис. 1.2

Більш точне уявлення про графік функції f можна отримати, якщо позначити точки, які відповідають іншим раціональним значенням аргументу (рис. 1.3).

Виявляється, що існує тільки одна неперервна на $\mathbb{R}$ функція g, графік якої проходить через усі точки графіка функції f. Графік

Розглянемо властивості показникової функції $f(x) = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

- *Областю визначення показникової функції є множина дійсних чисел*, тобто $D(f) = \mathbb{R}$.
- *Областю значень показникової функції є множина* $(0; +\infty)$, тобто $E(f) = (0; +\infty)$.
- *Показникова функція не має нулів, і проміжок* $(-\infty; +\infty)$ *є її проміжком знакосталості.*
- *При $a > 1$ показникова функція є зростаючою; при $0 < a < 1$ показникова функція є спадною.*
- *Показникова функція є диференційовною.* Детальніше про похідну показникової функції ви дізнаєтеся в п. 8.

На рисунках 1.5 і 1.6 схематично зображено графік показникової функції для випадків $a > 1$ і $0 < a < 1$ відповідно.

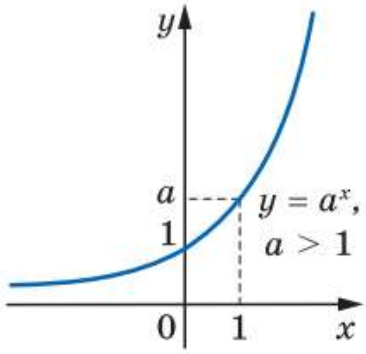


Рис. 1.5

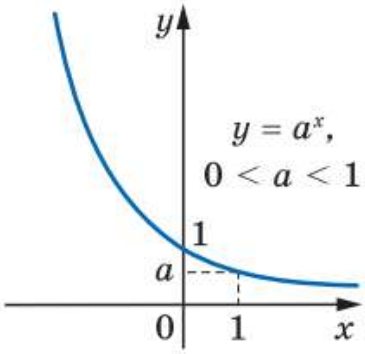


Рис. 1.6

функції g зображено на рисунку 1.4. Множина точок графіка функції f є підмножиною множини точок графіка функції g.

Функцію g називають **показниковою функцією** з основою 2 і записують: $g(x) = 2^x$.

Аналогічно можна розглядати показникову функцію з будь-якою основою a, де $a > 0$ і $a \neq 1$. Записують: $g(x) = a^x$.

Значення функції g у точці x називають **степенем додатного числа a з дійсним показником x** і позначають a^x.

Багато властивостей степеня з раціональним показником зберігаються і для степеня з дійсним показником.

Зокрема, для $a > 0$, $b > 0$ та будь-яких дійсних x і y справедливі такі рівності:

1) $\boldsymbol{a^x a^y = a^{x+y}}$;

2) $\boldsymbol{a^x : a^y = a^{x-y}}$;

3) $\boldsymbol{(a^x)^y = a^{xy}}$;

4) $\boldsymbol{(ab)^x = a^x b^x}$;

5) $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}}$.

1.3.° Укажіть, які з даних функцій є зростаючими, а які — спадними:

1) $y = 10^x$; 3) $y = 2^{-x}$; 5) $y = 2^x \cdot 3^x$;

2) $y = \left(\frac{5}{9}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$; 6) $y = 12^x \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^x$.

1) $y = 10^x$

$10 > 1$ – зростаюча.

2) $y = \left(\frac{5}{9}\right)^x$

$\frac{5}{9} < 1$ – спадна.

3) $y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

$\frac{1}{2} < 1$ – спадна.

4) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x} = 5^x$.

$5 > 1$ – зростаюча.

5) $y = 2^x \cdot 3^x = 6^x$

$6 > 1$ – зростаюча.

6) $y = 12^x \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^x = \left(12 \cdot \frac{1}{18}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

$\frac{2}{3} < 1$ – спадна.

1.4.° Побудуйте графік функції $y = 3^x$. У яких межах змінюється значення функції, коли x зростає від -1 до 3 включно?

$y = 3^x$

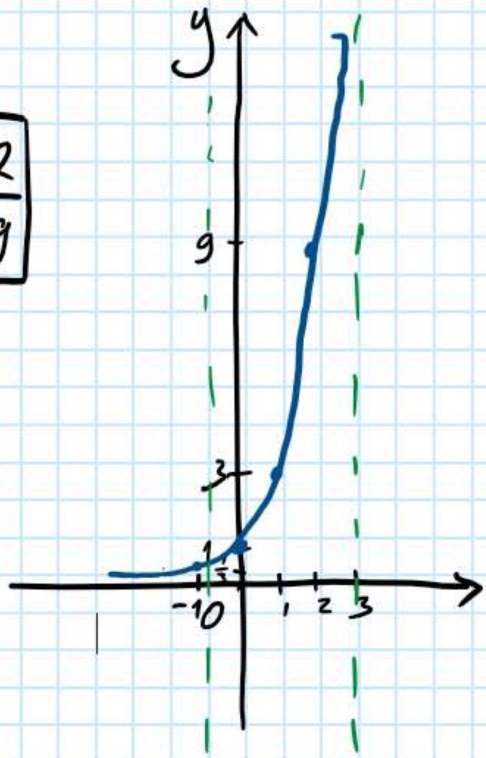
x	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{3}$	1	3	9

$y = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

$y = 3^0 = 1$

$y = 3^1 = 3$

$y = 3^2 = 9$



Коли $x \in [-1; 3]$, то

$y \in [\frac{1}{3}; 27]$.

1.6.° Порівняйте:

1) $5^{3,4}$ і $5^{3,26}$;

2) $0,3^{0,4}$ і $0,3^{0,3}$;

3) 1 і $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$;

4) $0,17^{-3}$ і 1;

5) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}$ і $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{7}}$;

6) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,7}$ і $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,8}$.

№1.6. 1) $5^{3,4} > 5^{3,26}$

$5 > 1, \; 3,4 > 3,26.$

2) $0,3^{0,4} < 0,3^{0,3}$

$0,3 < 1, \; 0,4 > 0,3.$

3) $1 < \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\left(\frac{5}{4}\right)^{0} < \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\frac{5}{4} > 1, \; 0 < \frac{1}{3}.$

4) $0,17^{-3} > 1$

$0,17^{-3} > 0,17^{0}$

$0,17 < 1, \; -3 < 0.$

5) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}} < \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{7}}$

$\sqrt{2} > 1, \; \sqrt{6} < \sqrt{7}.$

6) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,7} < \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,8}$

$\frac{\pi}{4} < 1, \; -2,7 > -2,8$

1.10.$^{\bullet}$ Обчисліть значення виразу:

1) $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$; 2) $\left(\left(3\sqrt[3]{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$; 4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$.

1) $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}} = 3^{(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}+1} : 3^{2\sqrt{2}} = 3^{2+\cancel{2\sqrt{2}}+1-\cancel{2\sqrt{2}}} = 3^{2+1} =$

$= 3^3 = 27.$

2) $\left(\left(3\sqrt[3]{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = \left(3^{\sqrt{3}}\cdot 7^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)^{\sqrt{3}} = 3^{(\sqrt{3})^2}\cdot 7^{\frac{(\sqrt{3})^2}{3}} = 3^3\cdot 7^{\frac{3}{3}} = 27\cdot 7^1 =$

$= 27\cdot 7 = 189.$

3) $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2}\cdot 36^{-\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{6^{(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}+1}\cdot 6^{-2\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{6^{5+\cancel{2\sqrt{5}}+1-\cancel{2\sqrt{5}}}} =$

$= \sqrt[3]{6^6} = \left(6^6\right)^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{6}{3}} = 6^2 = 36.$

4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{16}} = 2^{\sqrt{16}} = 2^4 = 16.$

1.12.• Спростіть вираз:

1) $\left(a^{\sqrt{5}}+2\right)\left(a^{\sqrt{5}}-2\right)-\left(a^{\sqrt{5}}+3\right)^2$; 2) $\dfrac{a^{2\sqrt{3}}-b^{2\sqrt{2}}}{\left(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}\right)^2}+1$.

1) $(a^{\sqrt{5}}+2)(a^{\sqrt{5}}-2)-(a^{\sqrt{5}}+3)^2 = (a^{\sqrt{5}})^2-2^2-\left((a^{\sqrt{5}})^2+6a^{\sqrt{5}}+9\right) =$

$= \cancel{a^{2\sqrt{5}}}-4-\cancel{a^{2\sqrt{5}}}-6a^{\sqrt{5}}-9 = -6a^{\sqrt{5}}-13.$

2) $\dfrac{a^{2\sqrt{3}}-b^{2\sqrt{2}}}{(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}})^2}+1 = \dfrac{a^{2\sqrt{3}}-b^{2\sqrt{2}}+(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}})^2}{(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}})^2} =$

$= \dfrac{a^{2\sqrt{3}}-\cancel{b^{2\sqrt{2}}}+a^{2\sqrt{3}}+2a^{\sqrt{3}}b^{\sqrt{2}}+\cancel{b^{2\sqrt{2}}}}{(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}})^2} = \dfrac{2a^{2\sqrt{3}}+2a^{\sqrt{3}}b^{\sqrt{2}}}{(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}})^2} = \dfrac{2a^{\sqrt{3}}\cancel{(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}})}}{(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}})^{\cancel{2}}} =$

$= \dfrac{2a^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}}.$

1.22.•• Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $2^x = x$; 2) $2^x = \sin x$; 3) $2^{-x} = 2 - x^2$.

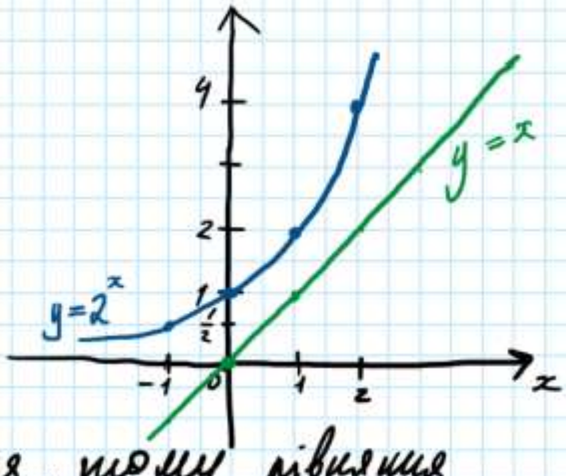
1) $2^x = x$

$y = 2^x$

x	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{2}$	1	2	4

$y = x$

x	0	1
y	0	1



Графіки не перетинаються, тому рівняння коренів не має.

Домашнє завдання: розв'язати задачі (в зошиті):

1)

Які з наведених функцій є зростаючими, а які – спадними **(1.2–1.3)**:

1) $y = 0,15^x$; 2) $y = 7^x$; 3) $y = \left(1\frac{8}{9}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{1}{100}\right)^x$?

2)

Порівняйте m і n, якщо: 1) $5^m < 5^n$; 2) $0,7^m < 0,7^n$.

1) $\left(2^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}}$; 2) $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$;

3) $9^{1+7\sqrt{2}} \cdot 9^{-2-7\sqrt{2}}$; 4) $4^{2+\sqrt{5}} : 4^{\sqrt{5}}$.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com