01.02.2024

Група 26

Математика (алгебра)

Урок 11-12

Тема: Критичні точки. Достатні умови зростання і спадання функції

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Нагадаємо, що

функцію називають *зростаючою* на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає більше значення функції;

функцію називають *спадною* на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає менше значення функції.

Проміжки, на яких функція зростає чи спадає, ще називають *проміжками монотонності*.

Теорема 1 (ознака сталості функції). **Функція $y = f(x)$ є сталою на проміжку $(a; b)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x) = 0$ для кожного x із цього проміжку.**

Теорема 2 (ознака зростання, спадання функції). **Якщо $f'(x) > 0$ в кожній точці проміжку $(a; b)$, то функція $y = f(x)$ зростає на $(a; b)$. Якщо $f'(x) < 0$ в кожній точці проміжку $(a; b)$, то функція $y = f(x)$ спадає на $(a; b)$.**

Критичними точками **функції називають внутрішні точки області визначення, у яких похідна не існує або дорівнює нулю.**

Алгоритм дослідження функції $f(x)$ на зростання і спадання:

1) Знайти область визначення функції.
2) Знайти похідну функції.
3) Знайти критичні точки функції.
4) Поділити знайденими критичними точками область визначення функції на проміжки та з'ясувати знак похідної на кожному з них (для цього достатньо визначити знак похідної $f'(x)$ в одній довільній точці проміжку).
5) За знаком похідної визначити проміжки зростання і спадання функції.

22.1.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x^2 + 4x - 7$;

2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$;

3) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$;

4) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x + 9$.

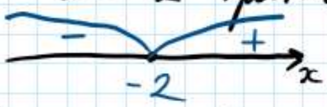
1) $f(x) = x^2 + 4x - 7$

$f'(x) = 2x + 4$

$2x + 4 = 0$

$2x = -4$

$x = -2$ – критична точка.



Функція ↑ на $[-2; +\infty)$.

Функція ↓ на $(-\infty; -2]$.

2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x + 0 = 6x^2 - 6x$

$6x^2 - 6x = 0$

$6x(x - 1) = 0$

$6x = 0 \qquad x - 1 = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 1$ – критичні точки.

Функція ↑ на $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Функція ↓ на $[0; 1]$.

3) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$

$f'(x) = -3x^2 + 18x + 21$

$-3x^2 + 18x + 21 = 0 \quad | : (-3)$

$x^2 - 6x - 7 = 0$

За теор. Вієта:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6; \\ x_1 x_2 = -7; \end{cases} \left| \begin{array}{l} x_1 = 7 \\ x_2 = -1 \end{array} \right.$ критичні точки.

Функція ↑: $(-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$.

Функція ↓: $[-1; 7]$.

4) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x + 9$

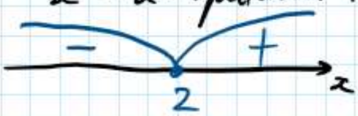
$f'(x) = \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4}x^3 - 8 = x^3 - 8$

$x^3 - 8 = 0$

$x^3 = 8$

$x = \sqrt[3]{8}$

$x = 2$ – критична точка.



Функція ↑: $[2; +\infty)$.

Функція ↓: $(-\infty; 2]$.

22.3.• Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7$;

2) $f(x) = \frac{3x+5}{2-x}$;

3) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$;

4) $f(x) = x + \frac{9}{x}$;

5) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$;

6) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$.

1) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-7$

$f'(x)=\frac{1}{\cancel{4}}\cdot\cancel{4}x^3-\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}x^2-0=$

$=x^3-x^2$

$D(y)=R$

$x^3-x^2=0$

$x^2(x-1)=0$

$x_1=0 \quad x_2=1$

Функція ↑: $[1;+\infty)$.

Функція ↓: $(-\infty;1]$.

2) $f(x)=\frac{3x+5}{2-x}$

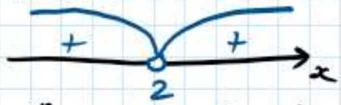
$f'(x)=\frac{3(2-x)-(-1)(3x+5)}{(2-x)^2}=$

$=\frac{6-\cancel{3x}+\cancel{3x}+5}{(2-x)^2}=\frac{11}{(2-x)^2}$

$D(y)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

$x\neq 2$

$\frac{11}{(2-x)^2}\neq 0$



Функція ↑: $(-\infty;2)\cup$
$\cup(2;+\infty)$.

Функція ↓: немає.

3) $f(x)=x^2+\frac{2}{x}=x^2+2x^{-1}$

$f'(x)=2x-1\cdot 2x=2x-2x^{-2}=2x-\frac{2}{x^2}$.

$D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. $\quad x\neq 0$

$2x-\frac{2}{x^2}=0 \quad |\times x^2$

$2x^3-2=0$

$2x^3=2$

$x^3=1$

$x=1$

Функція ↑: $[1;+\infty)$.

Функція ↓: $(-\infty;0)\cup(0;1]$.

4) $f(x)=x+\frac{9}{x}=x+9x^{-1}$

$f'(x)=1+(-1)\cdot 9\cdot x^{-2}=$

$=1-\frac{9}{x^2} \quad x\neq 0$

$D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

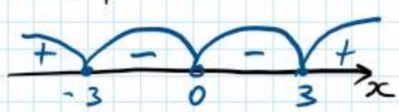
$1-\frac{9}{x^2}=0$

$-\frac{9}{x^2}=-1 \quad |\times(x^2)$

$-9=-x^2$

$x^2=9$

$x_1=3 \quad x_2=-3$



Функція ↑: $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

Функція ↓: $[-3;0)\cup(0;3]$.

5) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x+2}$

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - 1\cdot(x^2-3)}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2+4x-x^2+3}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$$

$(x+2)^2 \neq 0 \quad x+2 \neq 0 \quad x \neq -2$

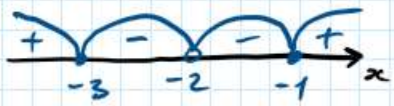
$D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty).$

$\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2} = 0 \quad | \times (x+2)^2$

$x^2+4x+3=0$

За теор. Вієта:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4; \\ x_1 x_2 = 3. \end{cases} \quad \begin{array}{l} x_1 = -3 \\ x_2 = -1 \end{array}$



Функція ↑: $(-\infty; -3] \cup [-1; +\infty)$.
Функція ↓: $[-3; -2) \cup (-2; -1]$.

23.1.° На рисунку 23.9 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-10; 9]$. Укажіть:

1) точки мінімуму;
2) точки максимуму.

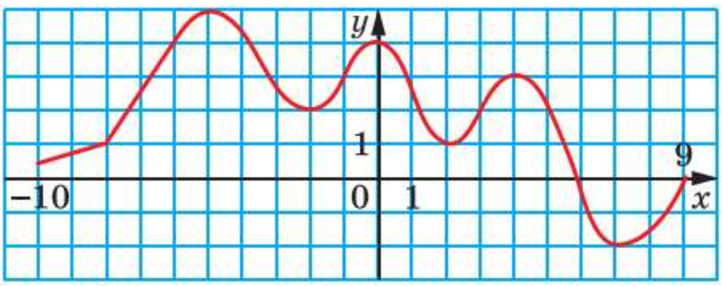


Рис. 23.9

1) $x_{min} = -10; -2; 2; 7.$
2) $x_{max} = -5; 0; 4; 9.$

23.3.° Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

1) $f(x) = 0{,}5x^4$;
2) $f(x) = x^2 - 6x$;
3) $f(x) = 12x - x^3$;
4) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$.

№23.3

1) $f(x)=0{,}5x^4$

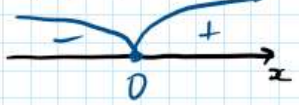
$f'(x)=0{,}5\cdot 4x^3=2x^3$

$D(y)=R$

$2x^3=0$

$x^3=0$

$x=0$



$x_{min}=0$

$x_{max}=$ немає

2) $f(x)=x^2-6x$

$f'(x)=2x-6$

$D(y)=R$

$2x-6=0$

$2x=6$

$x=3$

$x_{min}=3$

$x_{max}=$ немає

3) $f(x)=12x-x^3$

$f'(x)=12-3x^2$

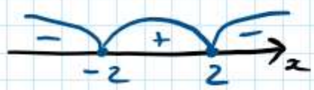
$D(y)=R$

$12-3x^2=0$

$-3x^2=-12$

$x^2=4$

$x_1=2 \quad x_2=-2$



$x_{min}=-2$

$x_{max}=2$

4) $f(x)=x^3-6x^2-15x+7$

$f'(x)=3x^2-12x-15$

$D(y)=R$

$3x^2-12x-15=0 \quad |:3$

$x^2-4x-5=0$

За теор. Вієта:

$\begin{cases} x_1+x_2=4, \\ x_1x_2=-5; \end{cases} \quad \begin{array}{|l} x_1=-1 \\ x_2=5 \end{array}$

$x_{min}=5$

$x_{max}=-1$

23.7.** Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$; 3) $f(x)=\dfrac{x^2-6x}{x+2}$.

1) $f(x)=x+\frac{4}{x}=x+4x^{-1}$

$f'(x)=1+4\cdot(-1)\cdot x^{-2}=1-\frac{4}{x^2}$

$x^2\neq 0 \quad x\neq 0$

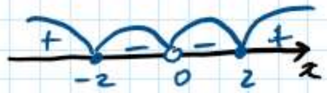
$D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

$1-\frac{4}{x^2}=0 \quad |\times x^2$

$x^2-4=0$

$x^2=4$

$x_1=2 \quad x_2=-2$



Функція ↑: $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

Функція ↓: $[-2; 0) \cup (0; 2]$.

$x_{min} = 2$

$x_{max} = -2$

2) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{0\cdot(x^2+1) - 1\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$(x^2+1)^2 \neq 0 \quad x^2+1 \neq 0 \quad x^2 \neq -1$

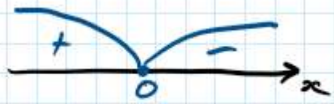
$x \in R$

$D(y) = R$

$-\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \quad |\times(x^2+1)^2$

$-2x = 0$

$x = 0$



Функція ↑: $(-\infty; 0]$.

Функція ↓: $[0; +\infty)$.

x_{min} = немає.

$x_{max} = 0$.

Домашнє завдання: розв’язати задачі (в зошиті):

1) Знайдіть критичні точки функції:

   1) $y = 4x - x^2$;   **2)** $y = 6x^2 + x^3$.

2) Знайти проміжки зростання і спадання функції:

   1) $m(x) = 4 - x$;   **2)** $f(x) = 2x - 11$;

   3) $g(x) = x^2 + 2x - 11$;   **4)** $t(x) = 4 - 6x - x^2$;

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com