Уроки 25-26 (15.09.2023) 2Е-1, Основи технічної механіки

ТЕМА : АНАЛІТИЧНІ УМОВИ РІВНОВАГИ ПЛОСКОЇ СИСТЕМИ СИЛ

Знайдемо аналітичні умови рівноваги плоскої системи сил, які є висновками з механічних умов рівноваги:

$$\vec{R} = 0;\ M_0 = 0. \tag{63}$$

Величини R і M_0 визначаються рівностями:

$$R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2}\ ;\ R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}\ ;\ R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}\ ;\ M_0 = \sum_{k=1}^{n} M_0(\overrightarrow{F_k}).$$

Головний вектор $\vec{R}$ може дорівнювати нулю тільки тоді, коли одночасно $R_x = 0$, $R_y = 0$.

Отже, умови (63) будуть виконані тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\ \sum_{k=1}^{n} M_0(\overrightarrow{F_k}) = 0. \tag{64}$$

<u>**Рівності (64) виражають такі аналітичні умови рівноваги плоскої системи сил: для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил на кожну з двох координатних осей і алгебраїчна сума моментів цих сил відносно довільної точки на площині дії сил, дорівнювали нулю.**</u>

Рівняння (64) одночасно виражають необхідні умови рівноваги вільного твердого тіла під дією плоскої системи сил. Замість них можна користуватися системами інших трьох рівнянь незалежних одна від одної. Існує ще дві можливості.

1. Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів усіх сил відносно яких-небудь двох центрів A та B і сума проекцій їх на вісь Ox, яка не перпендикулярна до прямої AB, дорівнювали нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\overrightarrow{F_k}) = 0;\ \sum_{k=1}^{n} M_B(\overrightarrow{F_k}) = 0;\ \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0. \qquad (65)$$

Необхідність цих умов очевидна, оскільки коли будь-яке з них не виконується, то або $R \neq 0$, або $M_A \neq 0$, і тоді рівноваги не буде.

<u>Доведемо достатність умов (65).</u> Коли для даної системи сил виконуються перші дві умови, така система сил може мати рівнодійну, лінія дії якої проходить через точки A та B. Оскільки вісь Ox проведена не перпендикулярно до AB , остання умова може бути виконана тільки тоді, коли рівнодійна $R = 0$, тобто має місце рівновага.

2.Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів цих сил відносно будь-яких трьох точок A, B, C, що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\overrightarrow{F_k}) = 0;\ \sum_{k=1}^{n} M_B(\overrightarrow{F_k}) = 0;\ \sum_{k=1}^{n} M_C(\overrightarrow{F_k}) = 0. \qquad (66)$$

Необхідність цих умов очевидна. Достатність умов (66) випливає з того, що коли при одночасному виконанні цих умов система сил не знаходилась би в рівновазі, то вона мала б приводитись до рівнодійної; лінія дії якої одночасно проходила б через точки A, B, C. Отже, при виконанні умов (66) має місце рівновага.

Умови (64) вважають основними, оскільки при їх використанні ніяких обмежень на вибір осей координат і центра моментів не накладають.

Якщо на тіло поряд з плоскою системою сил $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}, \ldots, \overrightarrow{F_n}$ діє система пар сил з моментами $M_1,\ M_2, \ldots,\ M_n$, які лежать у цій самій площині, то при складанні умов рівноваги в рівняння проекцій сили пари не увійдуть, оскільки сума проекцій сил пари на будь-яку вісь дорівнює нулю. У рівняння моментів до моментів сил алгебраїчно додаються моменти пар.

У випадку, коли усі сили, що діють на абсолютно тверде тіло, паралельні між собою, можемо спрямувати вісь Ox перпендикулярно до сил, а вісь Oy – паралельно їм. Тоді проекція кожної сили на вісь Ox буде дорівнювати нулю і перша з умов (64) перетвориться у тотожність. У результаті для паралельних сил залишаться дві умови рівноваги:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \ \sum_{k=1}^{n} M_0(\overrightarrow{F_k}) = 0. \tag{67}$$

Отже, для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб сума проекцій усіх сил на паралельну їм вісь і сума моментів цих сил відносно будь-якої точки дорівнювала нулю.

Друга форма умов рівноваги для плоскої системи паралельних сил, яку можна одержати з рівностей (67):

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\overrightarrow{F_k}) = 0; \ \sum_{k=1}^{n} M_B(\overrightarrow{F_k}) = 0. \tag{68}$$

Точки A та B не повинні лежати на прямій, паралельній силам.

УРОК 24
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ВИКОРИСТАННЯМ РІВНЯНЬ РІВНОВАГИ

Приклад 1. До однорідної балки $AB = 12$ м вагою $P = 1$кН прикладені сили $P_1 = 3$кН, $P_2 = 1$кН (див. рис. 50). Знайти опорні реакції шарніра C і котка D. Розміри показано на рисунку.

Розв'язування.

Розглядаємо рівновагу балки AB. Оскільки відомі сили і реакція котка D паралельні, то паралельно цим силам повинна бути спрямована реакція шарніра C.

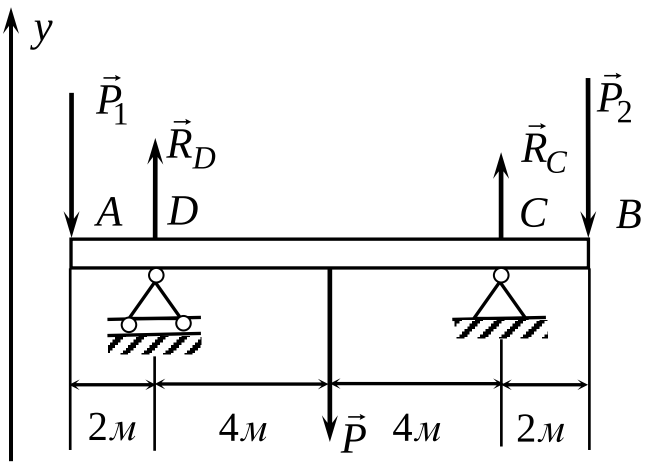

Рис. 50

Візьмемо вісь, паралельну даним силам, а центр моментів виберемо у точці A, де прикладена одна з невідомих сил. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = -P_1 + R_D - P + R_C - P_2;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_D\left(\vec{F}_k\right) = P_1 \cdot 2 - P \cdot 4 + R_C \cdot 8 - P_2 \cdot 10 = 0.$$

Звідси визначаємо реакції R_A=4 кН; R_B= 1 кН.

У результаті розв'язанні рівнянь рівноваги одержали значення реакції R_A і R_B із знаком "+". Це означає, що їх напрям вибрано правильно. Якщо б їх одержали із знаком "-", то напрям цих реакцій був би прямо протилежним вибраному.

<u>Приклад 2</u>. Визначити реакції консольної балки AO, зображеної на рис. 51, яка знаходиться в рівновазі під дією рівномірно-розподіленого навантаження, зосередженого на навантаження і пар сил.

<u>Розв'язування</u>. Розглянемо рівновагу консольної балки AO. Рівномірно розподілене навантаження замінимо зосередженою силою $Q = 3м \cdot 3кН/м = 9кН$.

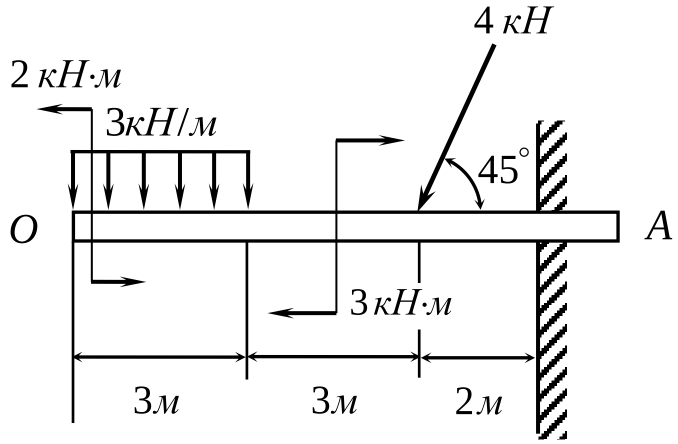

Рис. 51

Дію жорсткого кріплення на балку замінюємо двома силами $\overrightarrow{X_A}$, $\overrightarrow{Y_A}$ і парою з моментом M_A. Розрахункова схема показана на рис. 52.

Складемо рівняння рівноваги для визначення невідомих величин $\overrightarrow{X_A}$, $\overrightarrow{Y_A}$, M_A:

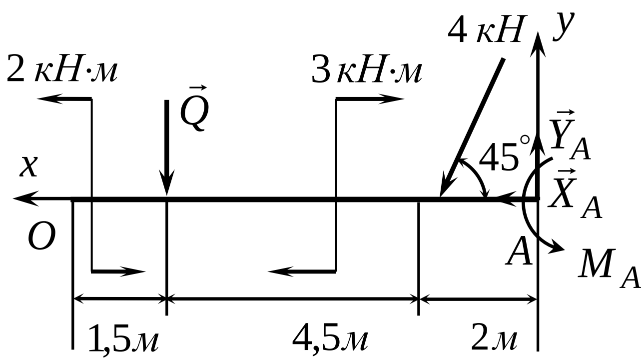

Рис. 52

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = X_A + 4\cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = Y_A - 9 - 4\sin 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\overrightarrow{F_k}) = 2 - 3 + 9\cdot 6{,}5 + 4\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2 + M_A = 0. \qquad (69)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (69), знаходимо

$$X_A = -2\sqrt{2}kH = 2{,}82kH\,;\; Y_A = 11{,}83kH\,;\; M_A = -63{,}16kH \cdot \text{м}.$$

Приклад 3. Жорстка рама закріплена в точці A шарніром, а в точці B прикріплена за допомогою невагомого стержня з шарнірами на кінцях. У точці C до рами прив'язаний трос, перекинутий через блок. До кінця троса підвішений вантаж вагою P. На раму діють пара сил з моментом M =60 кН·м, дві сили F_1=10 кН і F_2=20 кН.

Визначити реакції в'язей у точках A і B, якщо α_1=45°, α_2=60°, α_3=60°, a=0,5 м, P= 25кН (рис. 53). Вагою рами знехтувати.

Розв'язування. Розглянемо рівновагу жорсткої рами ACB.

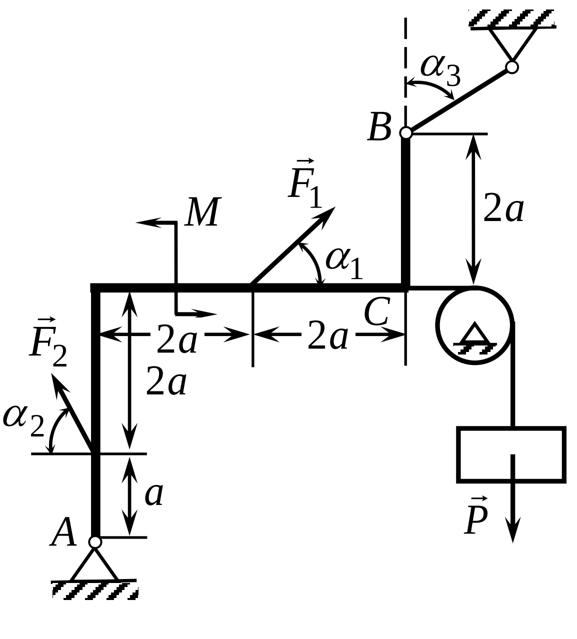

Рис. 53

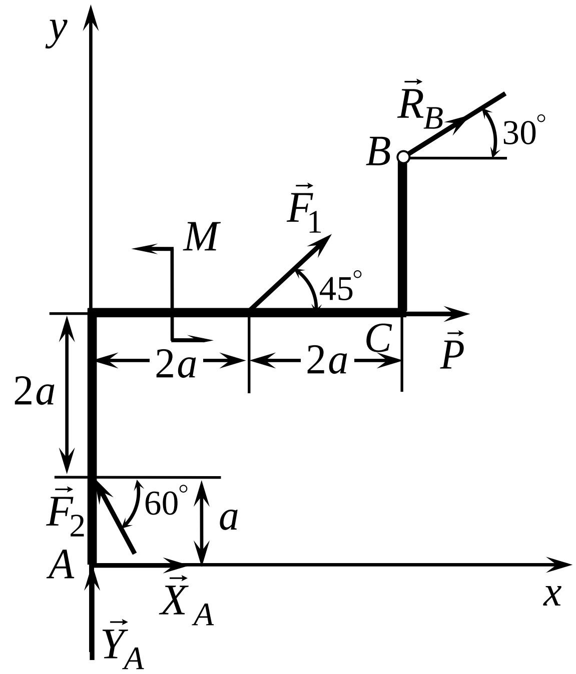

Рис. 54

Розрахункова схема показана на рис. 54.

Складемо рівняння рівноваги плоскої системи сил, які діють на раму:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = X_A - F_2 \cos 60^\circ + F_1 \cos 45^\circ + R_B \cos 30^\circ + P = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = Y_A - F_2 \sin 60^\circ + F_1 \sin 45^\circ + R_B \sin 30^\circ = 0; \tag{70}$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_k\right) = F_2 \cos 60^\circ \cdot a + M + F_1 \sin 45^\circ \cdot 2a - F_1 \cos 45^\circ \cdot 3a -$$

$$- P \cdot 3a - R_B \cos 30^\circ \cdot 5a + R_B \sin 30^\circ \cdot 4a = 0.$$

Підставляючи числові значення заданих величин у систему рівнянь (70) і розв'язуючи їх відносно невідомих X_A, Y_A, R_B одержуємо:

$$X_A = -39{,}884 kH;\ Y_A = -34{,}676 kH;\ R_B = 20{,}569 kH.$$

Реакції X_A та Y_A одержали із знаком "-". Це означає, що X_A, Y_A спрямовані в бік, протилежний тому, який показано на рис. 54.

Законспектувати матеріал. Розібрати наведені приклади. Конспект надати на **адресу ashmarina@ukr.net,** або на **вайбер 063-120-31-20**