

Парою сил називається система прикладених до твердого тіла двох сил, які рівні за величиною, діють уздовж паралельних прямих і протилежно спрямовані.

Площина, яка проходить через лінії дії сил пари, називається площиною дії пари. Відстань між лініями дій сил пари називається плечем пари (рис. 31). Система сил, які утворюють пару, не може знаходитись у рівновазі (див. аксіому 1). В той самий час пара сил не має рівнодійної. Якщо припустити, що пара сил (\vec{F}, \vec{F}') має рівнодійну $\vec{Q} \neq 0$, то сила $\vec{Q}_1 = -\vec{Q}$ повинна цю пару зрівноважити, тобто система сил $\vec{F}, \vec{F}', \vec{Q}_1$ має бути зрівноваженою. Але, як буде доведено для рівноваги довільної системи сил необхідно, щоб їх геометрична сума дорівнювала нулю.

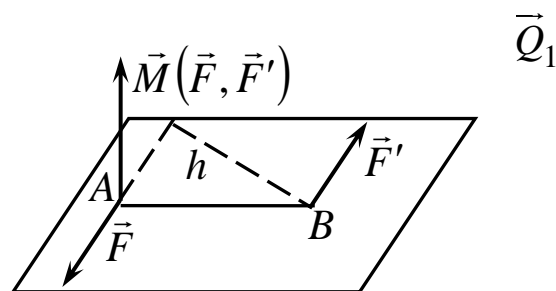


Рис. 31

Тому має виконуватись рівність $\vec{F} + \vec{F}' + \vec{Q}_1 = 0$, що неможливо,

оскільки $\vec{F} + \vec{F}' = 0$, а $\vec{Q}_1 \neq 0$. Таким чином, пару сил не можна замінити або зрівноважити однією силою. Отже, властивості пари сил мають бути вивчені окремо.

Дія пари сил на абсолютно тверде тіло зводиться до деякого обертового ефекту, який залежить від модуля сил пари і довжини плеча, положення площини дії пари сил, напряму обертання в цій площині.

Для характеристики обертового ефекту вводиться поняття моменту пари сил, який являє собою вектор, перпендикулярний до площини дії пари сил і спрямований так, щоб з кінця цього вектора обертання твердого тіла під дією пари сил було видно проти ходу стрілки годинника.

Абсолютна величина моменту пари сил дорівнює добутку однієї із сил на її плече

$$M(\vec{F}, \vec{F}') = Fh.$$

Дія пари сил на абсолютно тверде тіло цілком визначається її моментом, який є вільним вектором.

Коли досліджуються пари сил, що лежать в одній площині, їх моменти можна розглядати як скалярні величини. Напрямок обертання у площині характеризується знаком моменту. Знак моменту пари сил вважають додатним, коли напрям сил пари відповідає напрямку обертання тіла, на яке діє ця пара сил, проти руху годинникової стрілки

$$M = \pm Fh.$$

Теорема. Момент пари сил (\vec{F}, \vec{F}') дорівнює моменту однієї із сил пари відносно точки прикладання другої сили.

Доведення. Дійсно

$$\begin{aligned}\vec{M}_B(\vec{F}) &= \vec{BA} \times \vec{F}, \\ \vec{M}_A(\vec{F}') &= \vec{AB} \times \vec{F}',\end{aligned}$$

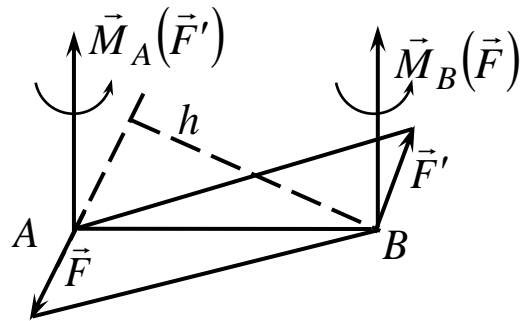


Рис. 32

де $\vec{M}_A(\vec{F}')$ і $\vec{M}_B(\vec{F})$

перпендикулярні до площини дії пари і спрямовані так, як показано на рис.32. Їх величини

$$M_A(\vec{F}') = M_B(\vec{F}) = F'h = Fh = M(\vec{F}, \vec{F}').$$

Теорема. Векторна сума моментів сил, які утворюють пару, відносно довільної точки дорівнює моменту пари (рис. 33).

Доведення. Нехай задана пара сил (\vec{F}, \vec{F}') . Візьмемо довільну точку O у просторі і складемо векторну суму моментів відносно цієї точки сил, що утворюють пару

$$\begin{aligned}\vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F}') &= \vec{OA} \times \vec{F} + \vec{OB} \times \vec{F}' = \vec{OA} \times \vec{F} + \vec{OB} \times (-\vec{F}) = \\ &= \vec{OA} \times \vec{F} - \vec{OB} \times \vec{F} = (\vec{OA} - \vec{OB}) \times \vec{F} = \vec{BA} \times \vec{F} = \vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{M}(\vec{F}, \vec{F}').\end{aligned}$$

У випадку плоских систем сил момент пари дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил, що утворюють пару, відносно довільної точки на цій площині

$$M(\vec{F}, \vec{F}') = M_O(\vec{F}') + M_O(\vec{F}).$$

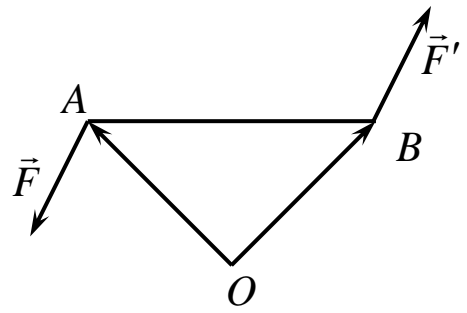


Рис. 33

Теорема про еквівалентність пар. Не

змінюючи дії на абсолютно тверде тіло, пару сил можна замінити другою парою, яка лежить в тій самій площині і має такий самий момент.

Доведення. Нехай на тверде тіло діє пара сил (\vec{F}, \vec{F}') з плечем d_1 . Проведемо у площині дії пари сил через довільні точки D і C дві паралельні прямі до перетину їх з лініями дій сил пари в точках A і B . Перенесемо точки прикладання сил \vec{F} і \vec{F}' у точки A і B .

Між прямими AC і BD буде відстань d_2 . Розкладемо сили \vec{F} і \vec{F}' за напрямками AB , BD і AC (рис.34). Очевидно, що $\vec{P} = -\vec{P}'$, $\vec{Q} = -\vec{Q}'$. Сили \vec{Q} і \vec{Q}' , як зрівноважені можна відкинути. У результаті пара сил (\vec{F}, \vec{F}') буде

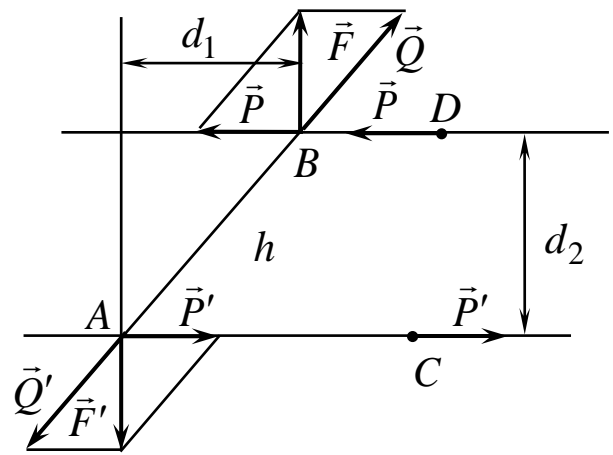


Рис. 34

замінена парою (\vec{P}, \vec{P}') з іншим плечем та іншими силами, які можна прикласти в точках D і C на їх лініях дії. В силу довільності вибору точок D , C і напрямів прямих BD і AC пара сил може бути розташована у площині її дії де завгодно.

Покажемо, що моменти пар сил (\vec{P}, \vec{P}') і (\vec{F}, \vec{F}') рівні. Сила \vec{F} є рівнодієюною сил \vec{P} і \vec{Q} , тому за теоремою Варіньона:

$$M(\vec{F}, \vec{F}') = M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{P}) + M_A(\vec{Q}) = M_A(\vec{P}) = M(\vec{P}, \vec{P}');$$

$$M(\vec{F}, \vec{F}') = M(\vec{P}, \vec{P}');$$

$$Fd_1 = Pd_2.$$

З доведеної теореми випливають такі властивості пари сил:

1) задану пару сил, не змінюючи її дії на абсолютно тверде тіло, можна переносити як завгодно у площині дії:

2) у заданій парі сил, не змінюючи її дії на абсолютно тверде тіло, можна змінювати сили і довжину плеча, аби залишався незмінним її момент;

3) дві пари, які лежать в одній площині і мають однакові моменти, еквівалентні.

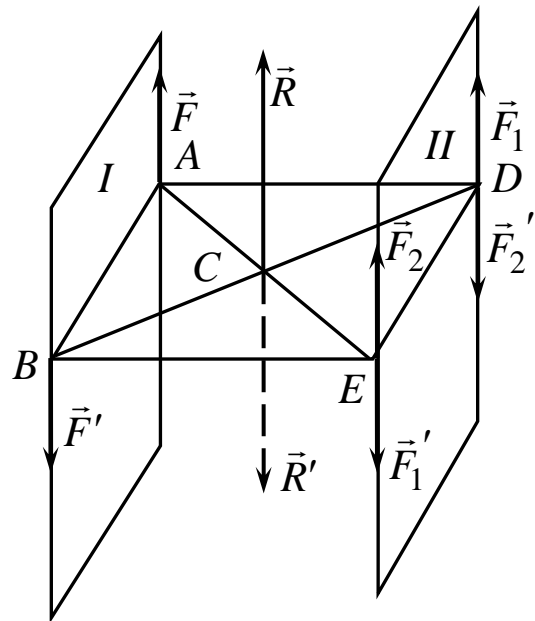
Звідси також видно, що дія пари сил на тверде тіло дійсно характеризується її моментом, який є вільним вектором.

Теорема про перенесення пари в паралельну площину. Дія пари сил на абсолютно тверде тіло не порушиться, якщо пару сил перенести з даної площини в довільну іншу площину, яка їй паралельна.

Доведення. Розглянемо пару сил (\vec{F}, \vec{F}') , яка лежить у площині I . Проведемо площину II , що паралельна площині I , і візьмемо на ній відрізок ED , рівний і паралельний AB (рис. 35). У точках D і E прикладемо чотири попарно зрівноважені сили, з яких

$$F = F_1' = F_2' = F_1 = F_2.$$

Зауважимо, що фігура $ABED$ є паралелограм, діагоналі якого в точці перетину діляться пополам. Тепер додамо паралельні сили \vec{F} і \vec{F}_2 . Вони (як рівні за модулем) заміняться рівнодійною \vec{R} , прикладеною в середині відрізка AE , тобто в точці C ; при цьому $R = 2F$. Сили \vec{F}' і \vec{F}_2' заміняться після додавання рівнодійною \vec{R}' , прикладеною в середині відрізка BD , тобто в точці C ; при цьому $R' = 2F' = R$. Отже, сили, \vec{R} і \vec{R}' , зрівноважені, можна відкинути.



як

Рис. 35

У результаті пара сил (\vec{F}, \vec{F}') замінюється такою самою парою (\vec{F}_1, \vec{F}_1') , але розташованою у площині II .

Із доведеної теореми випливає, що дві пари, які лежать в одній площині або в паралельних площинах і мають однакові моменти, еквівалентні.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що таке пара сил ?
2. Чи має пара сил рівнодійну ?
3. Чим можна замінити пару сил не змінюючи дії на абсолютно тверде тіло ?
4. Чому дорівнює векторна сума моментів сил, які утворюють пару, відносно довільної точки ?