УРОКИ 11-12(07.09.2023) 2Е-1, Основи технічної механіки
ТЕМА : ЗБІЖНА СИСТЕМА СИЛ

Момент сили відносно точки

Моментом сили відносно точки O називається вектор, прикладений у точці O, перпендикулярний до площини, що проходить через точку O і лінію дії сили, і спрямований в той бік, звідки обертання силою видно проти ходу стрілки годинника (рис. 27). Плече сили $\vec{F}$ відносно точки O – це перпендикуляр, опущений із точки O на лінію дії сили.

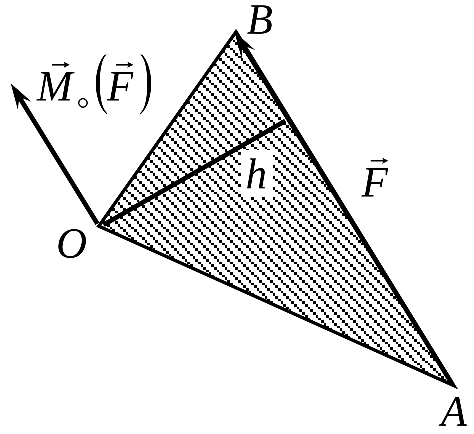

Рис. 27

Момент сили відносно точки дорівнює добутку сили на довжину плеча:

$$M_o(\vec{F}) = Fh = 2S_{\Delta OAB}. \tag{20}$$

Момент сили відносно точки O можна подати у вигляді векторного добутку:

$$M_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F},$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки прикладання сили $\vec{F}$.

Дія моменту на абсолютно тверде тіло визначається:

- модулем моменту;
- площиною обертання;
- напрямом обертання в цій площині.

Сила – вектор ковзний, тому її момент не змінюється при перенесенні її вздовж лінії дії. Навпаки, якщо ми поміняємо точку O, то положення і площа трикутника OAB зміниться. Отже, зміниться і момент сили. Тому момент сили відносно будь-якої точки O є вектор закріплений і переносити його в інше місце не можна.

Момент сили відносно точки:

1) не зміниться, якщо точку прикладання сили переносити вздовж її лінії дії;

2) дорівнює нулю тільки тоді, коли сила дорівнює нулю або коли лінія дії сили проходить через точку O;

3) чисельно виражається подвійною площею трикутника OAB (див. рис. 27):

$$M_o(\overrightarrow{F}) = 2S_{\Delta OAB}. \qquad (21)$$

Нехай сила $\overrightarrow{F}$ прикладена в точці A з координатами x, y, z. Проекції сили $\overrightarrow{F}$ на осі координат – F_x, F_y, F_z; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори (рис. 28).

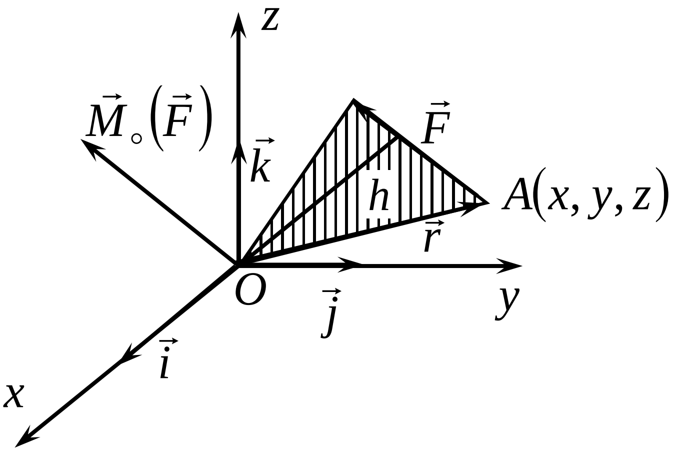

Рис. 28

Тоді

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z\,;\ \overrightarrow{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z\,.$$

Отже,

$$\vec{M}_0\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(yF_z - zF_y\right) + \vec{j}\left(zF_x - xF_z\right) + \vec{k}\left(xF_y - yF_x\right).$$

Проекції моменту сили відносно початку координат на осі координат:

$$M_{ox} = yF_z - zF_y \,;\, M_{oy} = zF_x - xF_z \,;\; M_{oz} = xF_y - yF_x \,. \quad (22)$$

Модуль моменту

$$M_o = \sqrt{{M_{ox}}^2 + {M_{oy}}^2 + {M_{oz}}^2} \,. \quad (23)$$

Напрям вектора $M_o(\vec{F})$ визначається напрямними косинусами:

$$\cos(M_o, Ox) = \frac{M_{ox}}{M_o};\; \cos(M_o, Oy) = \frac{M_{oy}}{M_o};\; \cos(M_o, Oz) = \frac{M_{oz}}{M_o}.$$

Коли всі сили лежать в одній площині, момент сили відносно точки, що лежить у цій самій площині, можна розглядати як алгебраїчну величину. Напрям обертання у площині задається знаком моменту сили

$$M_o = \pm Fh \,. \quad (24)$$

Момент сили відносно точки вважають додатним, якщо сила намагається викликати обертальний рух проти ходу стрілки годинника. Діючий у зворотному напрямку момент точки вважають від'ємним. Момент сили відносно точки вимірюється в ньютонах на метр (Н·м).

Теорема Варіньона. Момент рівнодійної збіжної системи сил відносно довільної точки дорівнює векторній сумі моментів складових відносно цієї самої точки.

Доведення. Нехай вектор $\vec{R}$ є рівнодійною системи сил $\vec{F_i}$ $(i = 1,2,...n)$, прикладених у точці A (рис. 29)

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \,. \quad (25)$$

Момент рівнодійної $\vec{R}$ відносно точки O

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + ... + \vec{r} \times \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{r} \times \vec{F}_i.$$

Звідки

$$\overrightarrow{M_o}(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_o}(\vec{F_i}). \tag{26}$$

Коли розглядати збіжну систему сил, розташованих в одній площині, то замість векторної суми одержимо скалярну рівність

$$M_o\left(\vec{R}\right) = \sum_{i=1}^{n} M_o\left(\vec{F_i}\right), \tag{27}$$

яка читається так: **момент рівнодійної збіжної плоскої системи сил відносно довільної точки, яка лежить в тій самій площині, дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно тієї ж точки.**

Згідно з (22) аналітичне визначення моменту сили відносно початку O координат для сил, що розташовані в одній площині,

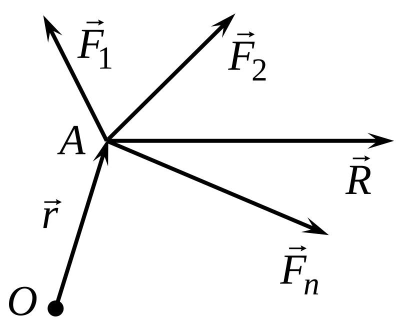

Рис. 29

$$M_o = xF_y - yF_z\,. \tag{28}$$

Очевидно, що момент тієї самої сили відносно точки O_1 (рис. 30) з координатами (a,b) буде

$$M_{o_1}(\vec{F}) = (x-a)F_y - (y-b)F_x.$$

Якщо сила задана аналітично своїми проекціями F_x та F_y і відомий момент M_o відносно довільної точки O, то рівняння (28), в якому x, y розглядаються як біжучі координати, буде рівнянням прямої лінії – лінії дії сили $\vec{F}$.

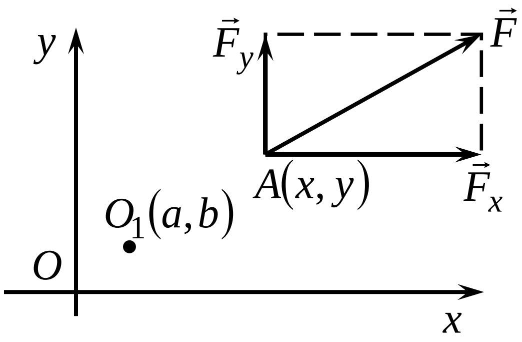

Рис. 30

Рівняння $M_o(\vec{R}) = xR_y - yR_x$ можна розглядати як рівняння лінії дії рівнодійної плоскої системи збіжних сил.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається моментом сили відносно точки O?
2. Коли момент сили відносно точки дорівнює нулю ?
3. Сформулюйте і доведіть теорему Варіньона .
4. Чому дорівнює момент рівнодійної збіжної плоскої системи сил відносно довільної точки ?