31.10.2023

Група 36

Математика (алгебра)

Урок 7-8

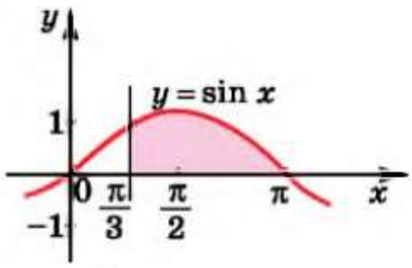
Тема: Розв'язування задач з теми: «Визначений інтеграл. Площа криволінійної трапеції». Фізичний зміст інтеграла

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати знання з фізики під час розв'язування прикладних задач; формувати уяву про процеси у природі;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення фізики та астрономії; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення фізики та астрономії, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Задача 1. Обчислити за допомогою визначеного інтеграла площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ і $x = \pi$ (мал. 12.2).



Мал. 12.2

Розв'язання.

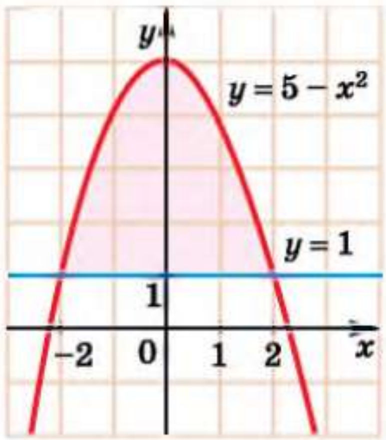
$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = -\cos\pi - \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5.$$

Відповідь. 1,5.

Задача 2. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = 5 - x^2$ і $y = 1$.

Розв'язання. 1) Знайдемо абсциси точок перетину графіків. Маємо $5 - x^2 = 1$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$. Ордината обох точок перетину дорівнює 1.

2) Зобразимо схематично графіки функцій і абсциси їх точок перетину (мал. 12.5).



Мал. 12.5

3) Шукана площа:

$$S = \int_{-2}^{2} (5 - x^2 - 1)dx = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx =$$

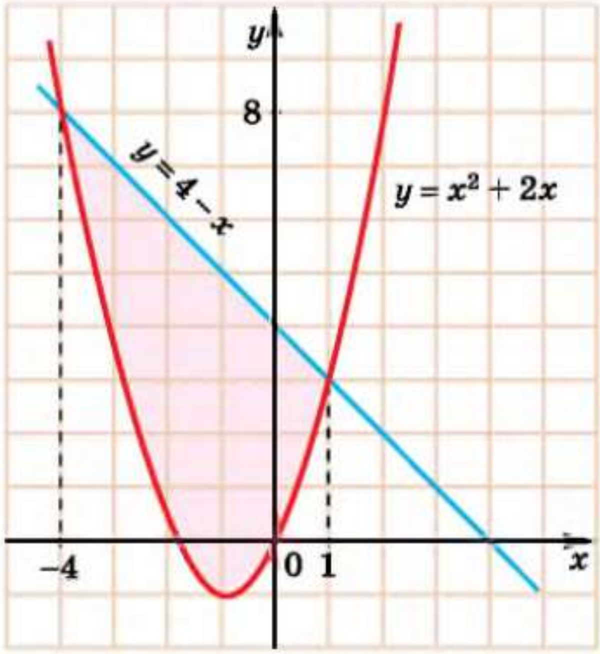
$$=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\left(4\cdot 2-\frac{2^3}{3}\right)-\left(4\cdot(-2)-\frac{(-2)^3}{3}\right)=10\frac{2}{3}.$$

Відповідь. $10\frac{2}{3}$.

Задача 3. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 2x$ і $y = 4 - x$.

Розв'язання. 1) Знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій: $x^2 + 2x = 4 - x$; $x^2 + 3x - 4 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = -4$. Ординати точок перетину $y_1 = 3$; $y_2 = 8$.

2) Зобразимо схематично графіки функцій (мал. 12.6).



Мал. 12.6

3) Шукана площа:

$$S=\int_{-4}^{1}\left((4-x)-(x^2+2x)\right)dx=\int_{-4}^{1}(-x^2-3x+4)dx=$$

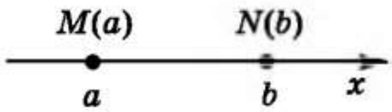
$$=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_{-4}^{1}=\left(-\frac{1^3}{3}-\frac{3\cdot 1^2}{2}+4\cdot 1\right)-$$

$$-\left(-\frac{(-4)^3}{3}-\frac{3\cdot(-4)^2}{2}+4\cdot(-4)\right)=2\frac{1}{6}+18\frac{2}{3}=20\frac{5}{6}.$$

Відповідь. $20\frac{5}{6}$.

2. Застосування визначеного інтеграла у фізиці

Розглянемо одне із застосувань визначеного інтеграла у фізиці. Нехай матеріальна точка рухається вздовж осі абсцис під дією сили, проекція якої на цю вісь – неперервна на деякому проміжку функція $f(x)$. Нехай $[a;\ b]$ належить проміжку неперервності функції, і під дією цієї сили матеріальна точка перемістилася з точки $M(a)$ у точку $N(b)$ (мал. 12.7). Тоді роботу A цієї сили можна обчислити за формулою



Мал. 12.7

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Задача 6. Обчислити роботу сили F при розтягуваннні пружини на 0,05 м, якщо при розтягуванні пружини на 0,02 м потрібна сила 4 Н.

Розв'язання. 1) За законом Гука сила F пропорційна розтягу (або стиску) пружини, тобто $F = kx$, де x – величина розтягу (або стиску), k – стала.

2) Оскільки при $x = 0{,}02$ м маємо $F = 4$ Н, то можна знайти коефіцієнт $k = \dfrac{F}{x} = \dfrac{4}{0{,}02} = 200$. Отже, $F(x) = 200x$.

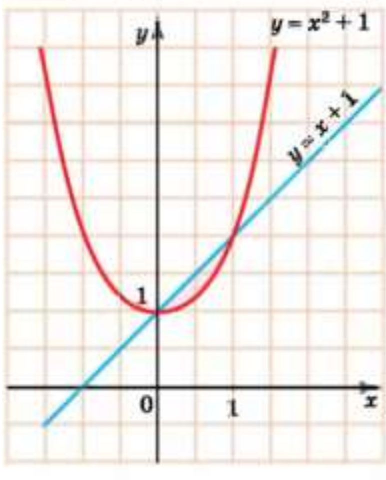
3) Знаходимо роботу A при розтягненні пружини на 0,05 м:

$$A = \int_0^{0{,}05} 200x dx = 200 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0{,}05} = 100 \cdot (0{,}05^2 - 0^2) = 0{,}25 \text{ (Дж)}.$$

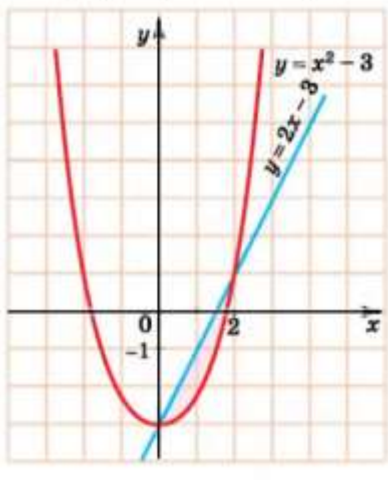
Відповідь. 0,25 Дж.

Домашнє завдання: розв’язати задачі (в зошиті) (в завданні 1 ЛИШЕ рис.12.10):

1) **12.3.** Знайдіть площу заштрихованої фігури (мал. 12.10).



Мал. 12.9



Мал. 12.10

2)

12.5. Тіло рухається вздовж осі абсцис під дією сили, проекція якої на цю вісь задається формулою $f(x) = 2x + 5$. Знайдіть роботу, що виконує ця сила при переміщенні тіла з точки з абсцисою 2 в точку з абсцисою 4.

Зворотній зв'язок:
E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com