31.10.2023

Група 23

Математика (геометрія)

Урок 10

Тема: Скалярний добуток векторів

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — два ненульових і неспівнапрямлених вектори. Від довільної точки O відкладемо вектори $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$, що дорівнюють відповідно векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 42.1). Величину кута AOB називатимемо **кутом між векторами** $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають так: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Очевидно, що коли $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180°$ (рис. 42.2).

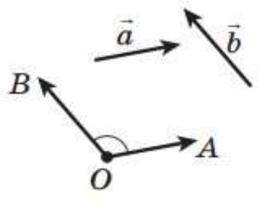

Рис. 42.1

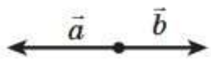

Рис. 42.2

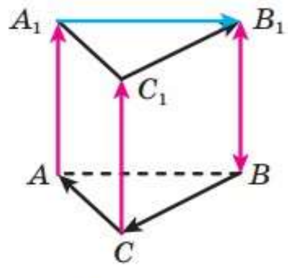

Рис. 42.3

Якщо $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то вважають, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$. Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то також вважають, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90°. Записують: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

На рисунку 42.3 зображено трикутну призму, основою якої є правильний трикутник, а бічне ребро перпендикулярне до площини основи.

Маємо: $\angle(\overline{CA}, \overline{C_1B_1}) = 60°$, $\angle(\overline{BC}, \overline{A_1B_1}) = 120°$, $\angle(\overline{AA_1}, \overline{BB_1}) = 0°$, $\angle(\overline{AA_1}, \overline{BC}) = 90°$, $\angle(\overline{CC_1}, \overline{B_1B}) = 180°$.

Означення. Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Маємо: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то очевидно, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ називають **скалярним квадратом** вектора $\vec{a}$ і позначають $\vec{a}^2$.

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, тобто $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Теорема 42.1. ***Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.***

Наприклад, для векторів, зображених на рисунку 42.3, маємо: $\overline{AA_1} \cdot \overline{BC} = 0$, $\overline{B_1A_1} \cdot \overline{C_1C} = 0$.

Теорема 42.2. ***Скалярний добуток векторів $\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}\,(b_1; b_2; b_3)$ можна обчислити за формулою***

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

Теорема 42.3. ***Косинус кута між ненульовими векторами $\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}\,(b_1; b_2; b_3)$ можна обчислити за формулою***

$$\boxed{\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}}$$

Деякі властивості скалярного добутку векторів аналогічні відповідним властивостям добутку чисел. Наприклад,

для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і будь-якого числа k є справедливими рівності:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b});$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

42.3.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30°$;

2) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$.

1) $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a};\vec{b}) = 30°$.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a};\vec{b})$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\sqrt{3}\cdot5\cdot\cos 30° = \overset{5}{\cancel{10}}\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 5\cdot3 = 15.$

2) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$, $\angle(\vec{a};\vec{b}) = 135°$.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot7\cdot\cos 135° = 4\cdot7\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{28\sqrt{2}}{2} = -14\sqrt{2}.$

42.5.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}\,(1; -2; 3)$, $\vec{b}\,(2; -4; 3)$; 2) $\vec{a}\,(-9; 4; 5)$, $\vec{b}\,(3; -1; 4)$.

1) $\vec{a}\,(4; -1; 3)$, $\vec{b}\,(2; -4; 3)$.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot2 + (-1)\cdot(-4) + 3\cdot3 = 8 + 4 + 9 = 21$

2) $\vec{a}\,(-9; 4; 5)$, $\vec{b}\,(3; -1; 4)$.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = -9\cdot3 + 4\cdot(-1) + 5\cdot4 = -27 - 4 + 20 = -11$

Домашнє завдання: розв’язати задачі (в зошиті):

1) **.** Дано вектори $\vec{a}(x; -1; 3)$ і $\vec{b}(3; 2; -2)$. При якому значенні x справджується рівність $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$?

2) **2.** Чи перпендикулярні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(-1; 2; 3)$, $\vec{b}(4; -1; 2)$; 2) $\vec{a}(2; -3; 0)$, $\vec{b}(6; -4; 5)$?

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com