28.09.2023

Група 24

Математика (геометрія)

Урок 7-8

Тема: Площа бічної та повної поверхні призми, паралелепіпеда та піраміди

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв’язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Площею бічної поверхні призми називають суму площ усіх її бічних граней. **Площею поверхні призми** (ще говорять: «**площа повної поверхні призми**») називають суму площ усіх її граней.

Очевидно, що виконується така рівність:

$$\boxed{S_п = S_б + 2S_{осн},}$$

де $S_п$ — площа поверхні призми, $S_б$ — площа бічної поверхні призми, $S_{осн}$ — площа основи призми.

Теорема 16.1. ***Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи та бічного ребра призми.***

Доведення. Кожна бічна грань прямої призми — прямокутник, одна сторона якого — ребро основи, а друга — бічне ребро. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — довжини ребер основи призми, b — довжина бічного ребра. Тоді $S_б = a_1b + a_2b + \ldots + a_nb = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)b$. Оскільки сума, записана в дужках, дорівнює периметру основи призми, то теорему доведено. ◄

Результат теореми 16.1 зручно подати у вигляді формули:

$$\boxed{S_б = P_{осн} \cdot b,}$$

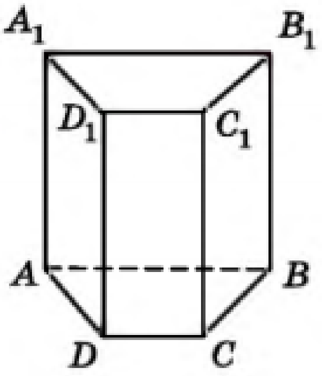
де $P_{осн}$ — периметр основи прямої призми, b — довжина бічного ребра.

Задача 2. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція, більша основа якої дорівнює 11 см, бічна сторона – 6 см, а кути при основі 60°. Знайти площу бічної поверхні призми, якщо її висота дорівнює меншій основі трапеції.

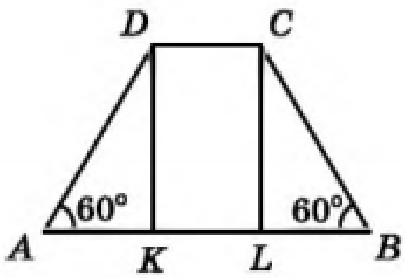
Розв'язання. 1) Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – задана чотирикутна призма, $AB = 11$ см, $AD = BC = 6$ см, $\angle A = \angle B = 60°$ (мал. 1.8).

2) Виконаємо планіметричний малюнок трапеції $ABCD$, що лежить в основі призми (мал. 1.9), та проведемо в ній висоти DK і CL.

3) У $\triangle ADK$: $\cos A = \dfrac{AK}{AD}$, $AK = 6\cos 60° = 3$ (см); аналогічно $BL = 3$ (см).



Мал. 1.8



Мал. 1.9

4) $KDCL$ – прямокутник, тому $DC = KL = AB - 2AK = 11 - 2 \cdot 3 = 5$ (см).

5) Висота BB_1 призми за умовою дорівнює меншій основі трапеції, тобто DC. Отже, $BB_1 = 5$ (см).

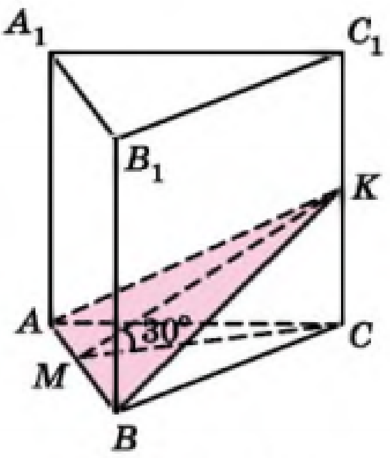
6) $S_{бічн} = Pl$, $P = 11 + 2 \cdot 6 + 5 = 28$ (см), $l = 5$ (см).

7) $S_{бічн} = 28 \cdot 5 = 140$ (см^2).

Відповідь. 140 см^2.

Задача 5. В основі прямої призми лежить рівносторонній трикутник, сторона якого дорівнює 4 см. Через сторону трикутника проведено переріз, який утворює кут 30° з площиною основи і перетинає бічне ребро в його середині. Знайти площу повної поверхні призми.

Розв'язання. 1) Нехай $ABCA_1B_1C_1$ – трикутна призма, основа якої – рівносторонній трикутник ABC, $AB = 4$ см (мал. 1.12).



Мал. 1.12

2) Через сторону AB основи трикутника проведено переріз ABK, де K – середина ребра CC_1.

3) Проведемо у $\triangle ABC$ медіану CM, яка є також висотою цього трикутника; $CM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (см).

4) Оскільки $CM \perp AB$ і CM є проекцією KM на площину ABC, то за теоремою про три перпендикуляри матимемо: $KM \perp AB$. Тоді $\angle KMC$ – кут, що утворює переріз з площиною основи. За умовою $\angle KMC = 30°$.

5) У $\triangle KMC$ ($\angle C = 90°$): $\operatorname{tg} M = \dfrac{KC}{MC}$, $KC = 2\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}30° = 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 2$ (см).

6) Оскільки K – середина CC_1, то $CC_1 = 2KC = 2 \cdot 2 = 4$ (см).

7) $S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}}$.

8) $S_{\text{осн}} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ (см²).

9) $S_{\text{бічн}} = Pl = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ (см²).

10) Тоді $S_{\text{повн}} = 48 + 2 \cdot 4\sqrt{3} = 48 + 8\sqrt{3}$ (см²).

Відповідь. $48 + 8\sqrt{3}$ см².

Задача 2. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 10 см і 17 см, а одна з діагоналей основи 21 см. Більша діагональ паралелепіпеда дорівнює 29 см. Знайти площу бічної поверхні паралелепіпеда.

Розв'язання. 1) Нехай $a = 10$ см і $b = 17$ см – сторони основи, $d_1 = 21$ см – діагональ основи. За властивістю діагоналей паралелограма: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$, звідки $d_2^2 = 2(10^2 + 17^2) - 21^2$; $d_2 = \sqrt{337}$ (см). Оскільки $\sqrt{337} < 21$, то більшою діагоналлю паралелепіпеда є та, проекцією якої на площину основи є діагональ основи завдовжки 21 см.

2) $AC = 21$ см, $A_1C = 29$ см (мал. 2.4).

У $\triangle AA_1C$ ($\angle A = 90°$): $AA_1 = \sqrt{A_1C^2 - AC^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$ (см).

3) Оскільки прямий паралелепіпед є видом прямої призми, то площу бічної поверхні $S_{бічн}$ прямого паралелепіпеда можна знайти за формулою: $S_{бічн} = Pl$, де P – периметр основи, l – довжина бічного ребра. Маємо: $P = 2(10 + 17) = 54$ (см), $S_{бічн} = 54 \cdot 20 = 1080$ (см^2).

Відповідь. 1080 см^2.

Задача 4. Довжини основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 5 см, а діагональ – $\sqrt{38}$ см. Знайти площу повної поверхні паралелепіпеда.

Розв'язання.

1) $a = 3$ см, $b = 5$ см, $d = \sqrt{38}$ см. Маємо: $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$;
$c^2 = d^2 - (a^2 + b^2)$; $c^2 = (\sqrt{38})^2 - (3^2 + 5^2)$; $c^2 = 4$; $c = 2$ (см).

2) $S_{повн} = 2(ab + ac + bc) = 2(3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2) = 62$ (см^2).

Відповідь. 62 см^2.

Площею бічної поверхні піраміди називають суму площ усіх її бічних граней. **Площею поверхні піраміди** (ще говорять: «**площа повної поверхні піраміди**») називають суму площ усіх її граней.

Очевидно, що виконується така рівність:

$$S_п = S_б + S_{осн},$$

де $S_п$ — площа поверхні піраміди, $S_б$ — площа бічної поверхні піраміди, $S_{осн}$ — площа основи піраміди.

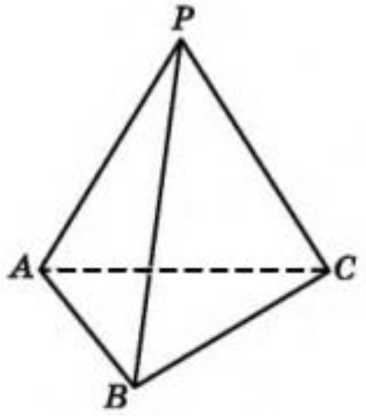
Теорема 18.1. ***Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра її основи та апофеми.***

Результат теореми 18.1 зручно подати у вигляді формули

$$\boxed{S_б = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot d,}$$

де $P_{осн}$ — периметр основи піраміди, d — довжина апофеми правильної піраміди.

Задача 1. Усі плоскі кути при вершині тетраедра по 30°. Знайти площу бічної поверхні цього тетраедра, якщо його бічні ребра дорівнюють 2 см, 3 см і 4 см.



Мал. 3.2

Розв'язання. 1) На малюнку 3.2 зображено тетраедр $PABC$. За умовою: $\angle APB = \angle BPC = \angle APC = 30°$, $PA = 2$ см, $PB = 3$ см, $PC = 4$ см.

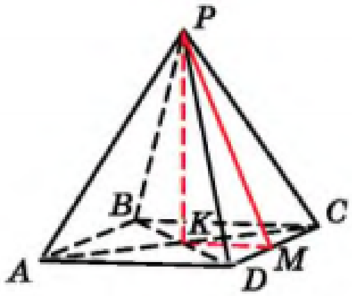
2) $S_{бічн} = S_{PAB} + S_{PBC} + S_{PAC} = \frac{1}{2} \cdot PA \times$

$\times PB \cdot \sin\angle APB + \frac{1}{2} \cdot PB \cdot PC \cdot \sin\angle BPC + \frac{1}{2} \times$

$\times PA \cdot PC \cdot \sin\angle APC = \frac{1}{2} \cdot \sin 30° \cdot (2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4) = 6{,}5$ (см²).

Відповідь. 6,5 см².

Задача 4. Знайти площу повної поверхні правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 6 см, а висота – 4 см.



Мал. 3.7

Розв'язання. 1) На малюнку 3.7 зображено правильну чотирикутну піраміду $PABCD$, $AD = 6$ см – сторона основи, яка є квадратом, $PK = 4$ см – висота піраміди.

2) $S_{повн} = S_{бічн} + S_{осн}$.

3) $S_{осн} = AD^2 = 6^2 = 36$ (см²).

4) PM – висота і медіана $\triangle PDC$. Оскільки M – середина CD, а K – середина AC, то KM – середня лінія трикутника ACD. Тому $KM = \frac{AD}{2} = \frac{6}{2} = 3$ (см).

5) У $\triangle PKM$ ($\angle K = 90°$): $PM = \sqrt{PK^2 + KM^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (см).

6) $S_{бічн} = pl = \frac{4 \cdot 6}{2} \cdot 5 = 60$ (см²).

7) $S_{повн} = 60 + 36 = 96$ (см²).

Відповідь. 96 см².

Домашнє завдання: розв'язати задачі (в зошиті):

1) Відома в усьому світі іграшка кубик Рубіка має ребро завдовжки 5,5 см. Знайдіть площу поверхні кубика Рубіка.

2) . Одним з елементів дитячого майданчика є правильна шестикутна призма, сторона основи якої дорівнює 50 см, а висота – 40 см. Потрібно пофарбувати бічну поверхню цієї призми. Скільки фарби буде використано, якщо на 1 дм^2 поверхні витрачають 3 г фарби?

3) . Піраміда Мефферта – іграшка, що являє собою тетраедр, усі ребра якого дорівнюють по 9 см. Обчисліть площу повної поверхні цієї іграшки. (Відповідь округліть до десятих квадратних сантиметрів.)

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com