

28.09.2023

Група Б-1

Вища математика

Урок 25-26

Тема: Розклад вектора за базисом.

Мета:

Навчальна – Формування понять базис вектора, скалярний добуток; вивчення способів використання даних понять

Розвивальна – розвивати просторову уяву, вміння проводити аналогії, порівняння;

Виховна – виховувати акуратність, зацікавленість у пізнанні нового.

Матеріали до уроку:

БАЗИС

Базисом простору називають таку систему векторів, що всі інші вектори простору можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів, що входять в базис.

На практиці це все реалізується досить просто. Базис, як правило, перевіряють на площині або в просторі, а для цього потрібно знайти визначник матриці другого, третього порядку, складений з координат векторів. Нижче схематично записані умови, за яких вектори утворюють базис

$$\vec{e}_1(x_1; y_1), \vec{e}_2(x_2; y_2) \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\vec{e}_1(x_1; y_1; z_1), \vec{e}_2(x_2; y_2; z_2), \vec{e}_3(x_3; y_3; z_3) \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Щоб розкласти вектор b за базисними векторами

$e[1], e[2], \dots, e[n]$, необхідно знайти коефіцієнти $x[1], \dots, x[n]$, при яких лінійна комбінація векторів $e[1], e[2], \dots, e[n]$ дорівнює вектору b :

$$x_1 \cdot e[1] + \dots + x_n \cdot e[n] = b.$$

Для цього векторне рівняння слід перетворити до системи лінійних рівнянь і знайти розв'язки. Це також достатньо просто реалізувати.

Знайдені коефіцієнти $x[1], \dots, x[n]$, називаються координатами вектора b в базисі $e[1], e[2], \dots, e[n]$.

Перейдемо до практичної сторони теми.

Завдання 1. Перевірити, чи утворюють вектори a_1, a_2 базис на площині

1) $a_1(3; 5), a_2(4; 2)$

Розв'язання: Складаємо визначник з координат векторів

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 4 = 6 - 20 = -14.$$

Визначник не дорівнює нулю, отже вектори лінійно незалежні, а значить утворюють базис.

2) $a_1(2; -3), a_2(5; -1)$

Розв'язання: Обчислюємо детермінант складений з векторів

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - (-3) \cdot 5 = -2 + 15 = 13.$$

Визначник рівний 13 (не рівний нулю), отже вектори a_1, a_2 є базисом на площині.

Завдання 2. Показати, що вектори a_1, a_2, a_3 утворюють базис тривимірного векторного простору, та розкласти вектор b за цим базисом (при розв'язуванні системи лінійних алгебраїчних рівнянь використати метод Крамера).

1) $a_1 (3; 1; 5), a_2 (3; 2; 8), a_3 (0; 1; 2), b (-3; 1; 2)$.

Розв'язання: Спочатку розглянемо систему векторів a_1, a_2, a_3 та перевіримо чи визначник матриці A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

побудованої на векторах відмінний від нуля. Матриця містить один нульовий елемент, тому детермінант доцільніше обчислювати розкладом за першим стовпцем або третім рядком.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 3(2 \cdot 2 - 8 \cdot 1) - 3(1 \cdot 2 - 5 \cdot 1) = -12 + 9 = -3 \end{aligned}$$

Визначник відмінний від нуля, отже вектори a_1, a_2, a_3 лінійно незалежні. Згідно означення вектори утворюють базис в E^3 . Запишемо розклад вектора b за базисом

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_3$$

Вектори рівні, коли їх відповідні координати рівні. Тому з векторного рівняння одержимо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 &= -3; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1; \\ 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 &= 2. \end{cases}$$

Розв'яжемо СЛАР [методом Крамера](#). Для цього запишемо систему рівнянь у вигляді

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Головний визначник СЛАР завжди рівний визначнику складеному з векторів базису

$$\begin{aligned} \Delta &= 3 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 5 + 0 \cdot 1 \cdot 8 - (0 \cdot 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 8) = \\ &= 12 + 15 + 0 + 0 - 6 - 24 = -3. \end{aligned}$$

Тому на практиці його не обчислюють двічі. Для знаходження допоміжних визначників ставимо стовпець вільних членів на місце кожного стовпця головного визначника. Визначники обчислюємо за правилом трикутників

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot 8 - \\ &-(0 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \cdot 8) = -12 + 6 - 6 + 24 = 12; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \cdot 5 + 0 \cdot 1 \cdot 2 - \\ &-(0 \cdot 1 \cdot 5 + (-3) \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2) = 6 - 15 + 6 - 6 = -9; \end{aligned}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 5 + (-3) \cdot 1 \cdot 8 - ((-3) \cdot 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 8) = 12 + 15 - 24 + 30 - 6 - 24 = 3.$$

Підставимо знайдені визначники у формулу Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{-3} = -4;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-9}{-3} = 3;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{3}{-3} = -1.$$

Отже, розклад \mathbf{b} за базисом наступний $\mathbf{b} = -4\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$. Координатами вектора \mathbf{b} у базисі $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ будуть $(-4, 3, 1)$.

СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК

Скалярним добутком двох векторів \mathbf{a}, \mathbf{b} $\bar{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \bar{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

називають число, що дорівнює сумі попарних добутків координат векторів з кожної осі, тобто

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n.$$

З формули бачимо, що знаходження скалярного добутку – це саме просте заняття, яке може виконати будь-який школяр.

Для прикладу, якщо маємо два вектори в просторі з координатами

$$\bar{\mathbf{a}} = (3; 1; 5); \bar{\mathbf{b}} = (5; -4; -1)$$

то їх скалярний добуток рівний

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = 3 \cdot 5 + 1 \cdot (-4) + 5 \cdot (-1) = 6.$$

Згідно другого означення, скалярний добуток двох векторів рівний числу, яке отримують множенням довжин векторів (їх модулів) на косинус кута між ними

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cos(\varphi), \quad (0 \leq \varphi \leq \pi).$$

Дане означення використовують не стільки для знаходження скалярного добутку, як значення косинуса кута і вже з таблиць – кута між векторами. З означення отримують зручну формулу для обчислення кута між векторами

$$\cos(\varphi) = \frac{(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})}{|\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}|}, \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

або в координатній формі

$$\cos(\varphi) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Приклади.

Задано вектори $\bar{\mathbf{a}}$ та $\bar{\mathbf{b}}$. Обчислити їх скалярний добуток, якщо

1) $\bar{\mathbf{a}} = (2; 1; 0); \bar{\mathbf{b}} = (2; -2; -3);$

2) $\bar{\mathbf{a}} = (-1; 7; 2); \bar{\mathbf{b}} = (3; 2; -5);$

- 3) $\bar{a} = (-2; 1; 3); \bar{b} = (4; 5; 6);$
- 4) $\bar{a} = (6; 3; 1); \bar{b} = (2; -2; 4);$
- 5) $\bar{a} = (7; -7; 2); \bar{b} = (1; -3; 9);$
- 6) $\bar{a} = (2^3; 8; 4); \bar{b} = (-4; 2^2; 16);$
- 7) $\bar{a} = (e^2; e^3; e^4); \bar{b} = (-3e^2; 5e; 9).$

Розв'язання. Виконаємо обчислення згідно першого означення.

- 1) $(\bar{a}, \bar{b}) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot (-3) = 0;$
- 2) $(\bar{a}, \bar{b}) = -1 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) = 1;$
- 3) $(\bar{a}, \bar{b}) = -2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 15;$
- 4) $(\bar{a}, \bar{b}) = 6 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = 10;$
- 5) $(\bar{a}, \bar{b}) = 7 \cdot 1 - 7 \cdot (-3) + 2 \cdot 9 = 4;$
- 6) $(\bar{a}, \bar{b}) = 2^3 \cdot (-4) + 8 \cdot 2^2 + 4 \cdot 16 = -2^5 + 2^5 + 2^6 = 64;$
- 7) $(\bar{a}, \bar{b}) = e^2 \cdot (-3e^2) + e^3 \cdot 5e + e^4 \cdot 9 = 11e^4.$

Домашнє завдання:

1. Довести, що вектори $a(1,3)$, $b(2,5)$ утворюють базис
2. Довести, що вектори $\vec{p} = (0,1,2)$, $\vec{q} = (1,0,1)$, $\vec{r} = (-1,2,4)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x} = (-2,4,7)$ за цим базисом.
3. Установити відповідність між векторами (1–4) та їх скалярними добутками

1. $\bar{a}_1(1; 5; 14)$, $\bar{b}_1(3; 4; -1)$	А. 7
2. $\bar{a}_2(3; 0; -4)$, $\bar{b}_2(5; -7; 2)$	Б. 9
3. $\bar{a}_3(4; -2; 9)$, $\bar{b}_3(-3; 1; 4)$	В. -6
4. $\bar{a}_4(5; -4; -1)$, $\bar{b}_4(3; 4; 5)$	Г. 22
	Д. 5

Зворотній зв'язок:

E-mail: vitasergiivna1992@gmail.com