

**27.10.2023**

**Група 23**

**Математика (алгебра)**

**Урок 7-8**

**Тема:** Похідна як швидкість. Самостійна робота з теми «Застосування похідної до дослідження графіків функцій».

**Мета:**

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

**Матеріали до уроку:**

Нехай автомобіль, рухаючись прямолінійною ділянкою дороги в одному напрямку, за 2 год подолав шлях 120 км. Тоді його середня швидкість руху дорівнює:  $v_{\text{сер}} = \frac{120}{2} = 60$  (км/год).

Знайдена величина дає неповне уявлення про характер руху автомобіля: на одних ділянках шляху автомобіль міг пересуватися швидше, на інших — повільніше, інколи міг зупинятися.

Разом із цим у будь-який момент часу спідометр автомобіля показував деяку величину — швидкість у даний момент часу. Значення швидкості в різні моменти повніше характеризують рух автомобіля.

Розглянемо задачу про пошук швидкості в даний момент часу на прикладі рівноприскореного руху.

Нехай матеріальна точка рухається по координатній прямій і через час  $t$  після початку руху має координату  $s(t)$ . Тим самим

задано функцію  $y = s(t)$ , яка дає змогу визначити положення точки в будь-який момент часу. Тому цю функцію називають **законом руху точки**.

Із курсу фізики відомо, що закон рівноприскореного руху задається формулою  $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$ , де  $s_0$  — координата точки на початку руху (при  $t = 0$ ),  $v_0$  — початкова швидкість,  $a$  — прискорення.

Нехай, наприклад,  $s_0 = 0$ ,  $v_0 = 1$  м/с,  $a = 2$  м/с<sup>2</sup>. Тоді  $s(t) = t^2 + t$ .

Зафіксуємо який-небудь момент часу  $t_0$  і надамо аргументу в точці  $t_0$  приріст  $\Delta t$ , тобто розглянемо проміжок часу від  $t_0$  до  $t_0 + \Delta t$ . За цей проміжок часу матеріальна точка здійснить переміщення  $\Delta s$ . Маємо:

$$\begin{aligned} \Delta s &= s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \underbrace{(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t)}_{s(t_0 + \Delta t)} - \underbrace{(t_0^2 + t_0)}_{s(t_0)} = \\ &= t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + t_0 + \Delta t - t_0^2 - t_0 = 2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2. \end{aligned}$$

Середня швидкість  $v_{\text{сер}}(\Delta t)$  руху точки за проміжок часу від  $t_0$  до  $t_0 + \Delta t$  дорівнює відношенню  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ . Отримуємо:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t_0 + 1 + \Delta t, \text{ тобто } v_{\text{сер}}(\Delta t) = 2t_0 + 1 + \Delta t.$$

Позначення для середньої швидкості  $v_{\text{сер}}(\Delta t)$  наголошує, що при заданому законі руху  $y = s(t)$  і фіксованому моменті часу  $t_0$  значення середньої швидкості залежить тільки від  $\Delta t$ .

Якщо розглядати досить малі проміжки часу від  $t_0$  до  $t_0 + \Delta t$ , то з практичних міркувань зрозуміло, що середні швидкості  $v_{\text{сер}}(\Delta t)$  за такі проміжки часу мало відрізняються одна від одної, тобто величина  $v_{\text{сер}}(\Delta t)$  майже не змінюється. Чим менше  $\Delta t$ , тим ближчим є значення середньої швидкості до деякого числа, що визначає швидкість у момент часу  $t_0$ . Іншими словами, якщо значення  $\Delta t$  прямують до нуля (позначають  $\Delta t \rightarrow 0$ ), то значення  $v_{\text{сер}}(\Delta t)$  прямують до числа  $v(t_0)$ . Число  $v(t_0)$  називають **миттєвою швидкістю** в момент часу  $t_0$ . Це записують так:  $v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{сер}}(\Delta t)$ . Говорять,

що число  $v(t_0)$  є **границею** функції  $v_{\text{сер}}(\Delta t)$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Якщо в наведеному прикладі  $\Delta t \rightarrow 0$ , то значення виразу  $2t_0 + 1 + \Delta t$  прямують до числа  $2t_0 + 1$ , яке є значенням миттєвої швидкості  $v(t_0)$ , тобто

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t_0 + 1 + \Delta t) = 2t_0 + 1.$$



Цей приклад показує, що коли матеріальна точка рухається за законом  $y = s(t)$ , то її миттєву швидкість у момент часу  $t_0$  визначають за допомогою формули

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{сеп}}(\Delta t), \text{ тобто}$$

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

18.7.\* Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом  $s(t) = 2t^2 + 3$  (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть миттєву швидкість матеріальної точки в момент  $t_0 = 2$  с.

$$s(t) = 2t^2 + 3, t_0 = 2 \text{ с}$$

$$v(t) = s'(t) = (2t^2 + 3)' = 2 \cdot 2 \cdot t^{2-1} + 0 = 4t$$

$$v(t_0) = v(2) = 4 \cdot 2 = 8 \text{ м/с}$$

Відповідь:  $v(t_0) = 8 \text{ м/с}$ .

18.8.\* Тіло рухається по координатній прямій за законом  $s(t) = 5t^2$  (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть:  
1) середню швидкість тіла при зміні часу від  $t_0 = 1$  с до  $t_1 = 3$  с;  
2) миттєву швидкість тіла в момент  $t_0 = 1$  с.

$$s(t) = 5t^2, t_0 = 1 \text{ с}, t_1 = 3 \text{ с}$$

$$1) v(t) = s'(t) = (5t^2)' = 5 \cdot 2 \cdot t^{2-1} = 10t$$

$$\Delta t = t_1 - t_0 = 3 - 1 = 2 \text{ с}$$

$$s_0(t_0) = 5 \cdot 1^2 = 5 \text{ м}$$

$$s_1(t_1) = 5 \cdot 3^2 = 45 \text{ м}$$

$$\Delta s = s_1 - s_0 = 45 - 5 = 40 \text{ м}$$

$$v_{\text{сеп}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{40 \text{ м}}{2 \text{ с}} = 20 \text{ м/с}$$

$$2) v(t_0) = 10 \cdot 1 = 10 \text{ м/с}$$

Відповідь:  $v(t_0) = 10 \text{ м/с}$ ;  $v_{\text{сеп}} = 20 \text{ м/с}$ .

20.9.\*\* Матеріальна точка масою 4 кг рухається по координатній прямій за законом  $s(t) = t^2 + 4$  (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть імпульс  $P(t) = mv(t)$  матеріальної точки в момент часу  $t_0 = 2$  с.

$$m = 4 \text{ кг}, S(t) = t^2 + 4, t_0 = 2 \text{ с}, P = mv(t) - ?$$

$$v(t) = S'(t) = (t^2 + 4)' = 2t + 0 = 2t$$

$$v(t_0) = v(2) = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с}$$

$$P = 4 \text{ кг} \cdot 4 \text{ м/с} = 16 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$$

Відповідь:  $P = 16 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$ .

20.10.\*\* Тіло масою 2 кг рухається по координатній прямій за законом  $s(t) = 3t^2 - 4t + 2$  (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть кінетичну енергію  $E(t) = \frac{mv^2(t)}{2}$  тіла в момент часу  $t_0 = 4$  с.

$$m = 2 \text{ кг}, S(t) = 3t^2 - 4t + 2, t_0 = 4 \text{ с}, E(t) = \frac{mv^2(t)}{2} - ?$$

$$v(t) = S'(t) = (3t^2 - 4t + 2)' = 3 \cdot 2t^{2-1} - 4 \cdot 1 \cdot t^{1-1} + 0 = 6t - 4$$

$$v(t_0) = v(4) = 6 \cdot 4 - 4 = 24 - 4 = 20 \text{ м/с}$$

$$E(t) = \frac{2 \text{ кг} \cdot 20^2 \text{ м}^2/\text{с}^2}{2} = 400 \text{ Дж}$$

Відповідь:  $E(t) = 400 \text{ Дж}$ .

Самостійна робота №2 «Застосування похідної до дослідження графіків функцій»

Розподіл варіантів: 1-6 за списком – 1 варіант; 7-12 за списком – 2 варіант; 13-18 за списком – 3 варіант; 18-24 за списком – 4 варіант, 25-30 за списком – 5 варіант.



### Варіант 1

1. (5 балів) Тіло рухається прямолінійно за законом  $x(t) = 0,75t^4 + 3t^2$  ( $x$  – у метрах,  $t$  – у секундах). Знайдіть швидкість точки в момент часу  $t = 2$  с.
2. (7 балів) Дослідити функцію  $y = x^2 - 3x - 10$  та побудувати її графік.

### Варіант 2

1. (5 балів) Тіло рухається прямолінійно за законом  $x(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t - 7$  ( $x$  – у метрах,  $t$  – у секундах). У який момент часу ( $u$  с) швидкість тіла дорівнюватиме 17 м/с?
2. (7 балів) Дослідити функцію  $y = x^2 - 2x - 8$  та побудувати її графік.

### Варіант 3

1. (5 балів) Тіло рухається прямолінійно за законом  $x(t) = 0,5t^4 + t^3$  ( $x$  – у метрах,  $t$  – у секундах). Знайдіть швидкість точки в момент часу  $t = 3$  с.
2. (7 балів) Дослідити функцію  $y = x^3 + 2x^2 + x$  та побудувати її графік.

### Варіант 4

1. (5 балів) Тіло рухається прямолінійно за законом  $x(t) = 3,5t^2 + 4t + 11$  ( $x$  – у метрах,  $t$  – у секундах). У який момент часу ( $u$  с) швидкість тіла дорівнюватиме 25 м/с?
2. (7 балів) Дослідити функцію  $y = 3x^2 - x^3$  та побудувати її графік.

### Варіант 5

1. (5 балів) Тіло рухається прямолінійно за законом  $x(t) = 0,25t^4 - t^2$  ( $x$  – у метрах,  $t$  – у секундах). Знайдіть швидкість точки у момент часу  $t = 3$  с.
2. (7 балів) Дослідити функцію  $y = x^4 + 4x^3 - 8x^2$  та побудувати її графік.

Домашнє завдання: розв'язати задачі (в зошиті):

- 1) **0.** Тіло рухається прямолінійно за законом  $x(t) = t^2$  ( $t$  вимірюється у секундах;  $x$  – у метрах). Знайдіть швидкість тіла в момент часу: 1)  $t = 4$  с;      2)  $t = 10$  с.
- 2) **6.** Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом  $x(t) = t^3$  ( $t$  вимірюється в секундах,  $x$  – у метрах). У який момент часу  $t$  ( $t > 0$ ) швидкість точки буде дорівнювати 48 м/с?

Зворотній зв'язок:

E-mail [t.anastasia.igorivna@gmail.com](mailto:t.anastasia.igorivna@gmail.com)