

27.09.2023

Група 34

Математика (алгебра)

Урок 5-6

Тема: Визначений інтеграл. Площа криволінійної трапеції

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати знання з фізики під час розв'язування прикладних задач; формувати уяву про процеси у природі;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення фізики та астрономії; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення фізики та астрономії, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Розглянемо функцію f , яка є неперервною на проміжку $[a; b]$ і набуває на ньому невід'ємних значень. Фігуру, обмежену графіком функції f і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$, називають *криволінійною трапецією*.

На рисунку 11.1 наведено приклади криволінійних трапецій.

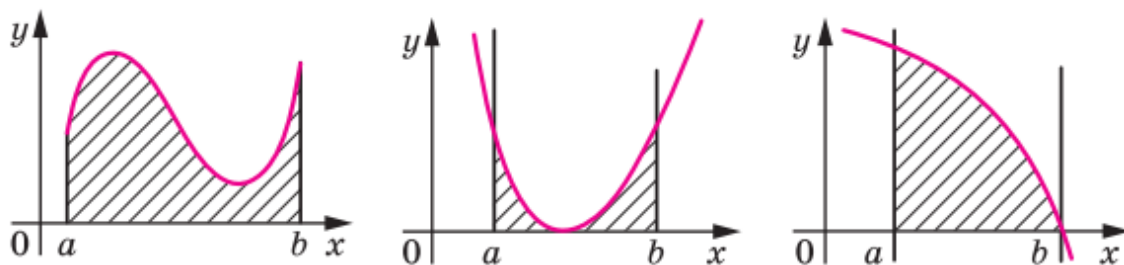


Рис. 11.1

Розглянемо теорему, яка дає змогу обчислювати площі криволінійних трапецій.

Теорема 11.1. *Площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ ($a < b$), можна обчислити за формулою*

$$S = F(b) - F(a),$$

де F — будь-яка первісна функції f на проміжку $[a; b]$.

Означення. Нехай F — первісна функції f на проміжку I , числа a і b , де $a < b$, належать проміжку I . Різницю $F(b) - F(a)$ називають **визначеним інтегралом** функції f на проміжку $[a; b]$.

Визначений інтеграл функції f на проміжку $[a; b]$ позначають $\int_a^b f(x)dx$ (читають: «інтеграл від a до b еф від ікс де ікс»). Отже,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (1)$$

де F — довільна первісна функції f на проміжку $[a; b]$.

Наприклад, функція $F(x) = x^3$ є первісною функції $f(x) = 3x^2$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Тоді для довільних чисел a і b , де $a < b$, можна записати:

$$\int_a^b 3x^2 dx = F(b) - F(a) = b^3 - a^3.$$

Зауважимо, що значення різниці $F(b) - F(a)$ не залежить від того, яку саме первісну функції f вибрано. Справді, кожному первісному G функції f на проміжку I можна подати у вигляді $G(x) = F(x) + C$, де C — деяке число. Тоді

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Рівність (1) називають **формулою Ньютона—Лейбніца**.

Отже, для обчислення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ за формулою Ньютона—Лейбніца потрібно:

- 1) знайти будь-яку первісну F функції f на проміжку $[a; b]$;
- 2) обчислити значення первісної F у точках $x = b$ і $x = a$;
- 3) знайти різницю $F(b) - F(a)$.

Під час обчислення визначених інтегралів різницю $F(b) - F(a)$ позначають $F(x)\Big|_a^b$.

Використовуючи таке позначення, обчислимо, наприклад, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$. Маємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin \frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2}.$$

Задача 1. Знайдіть площу S фігури, обмеженої графіком функції $f(x) = \sin x$ та прямими $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ і $x = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. На рисунку 11.2 зображено криволінійну трапецію, площу якої потрібно знайти.

Однією з первісних функції $f(x) = \sin x$ на проміжку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ є функція $F(x) = -\cos x$. Тоді $S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$. ◀

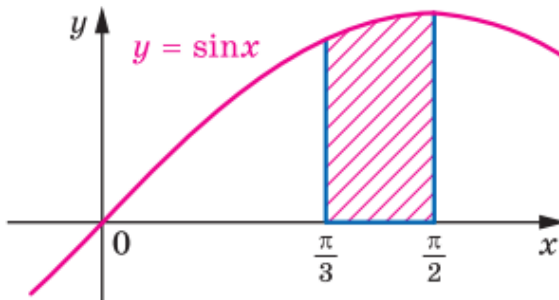


Рис. 11.2

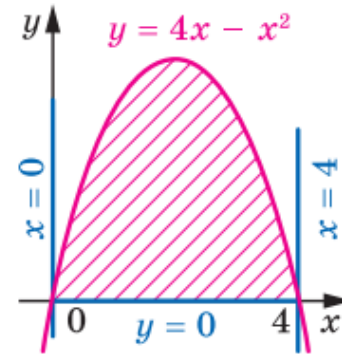


Рис. 11.3

Задача 2. Знайдіть площу S фігури, обмеженої графіком функції $f(x) = 4x - x^2$ і прямою $y = 0$.

Розв'язання. Графік функції f перетинає пряму $y = 0$ у точках $x_1 = 0$ і $x_2 = 4$ (рис. 11.3). Тоді фігура, площу якої треба знайти, є криволінійною трапецією, обмеженою графіком функції f і прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.

Однією з первісних функції f на проміжку $[0; 4]$ є функція $F(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$.

Тоді

$$S = F(4) - F(0) = 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = \frac{32}{3}.$$

Відповідь: $\frac{32}{3}$. ◀

Задача 3. Обчисліть $\int_1^2 (x^4 + x^2 - 2) dx$.

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x^4 + x^2 - 2) dx &= \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - 2x \right) \Big|_1^2 = \\ &= \left(\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1 \right) = 6 \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Відповідь: $6 \frac{8}{15}$. ◀

Формула Ньютона—Лейбніца дає змогу встановити зв'язок між визначеним інтегралом і площею S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ ($a < b$).

Використовуючи теорему 11.1, можна записати:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Ця формула виражає геометричний зміст визначеного інтеграла.

Домашнє завдання: розв'язати задачі (в зошиті):

- 1) 2.° Знайдіть площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунку 11.5.

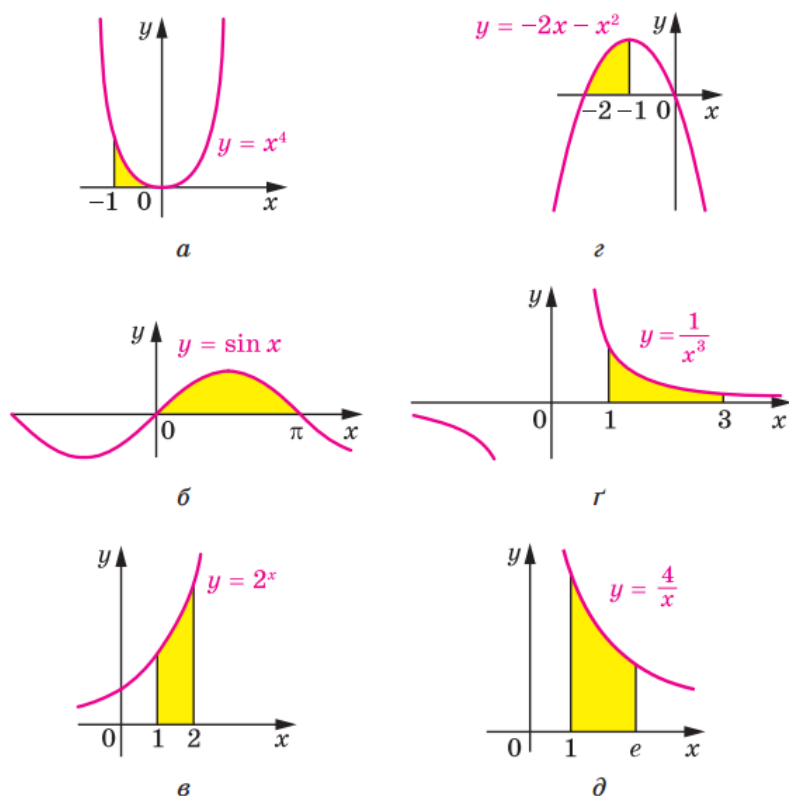


Рис. 11.5

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com