

27.09.2023

Група 24

Математика (алгебра)

Урок 24

Тема: Показникові нерівності

Мета:

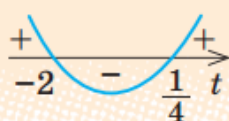
- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

2. Схема рівносильних перетворень найпростіших показникових нерівностей	
$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ знак нерівності зберігається	$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ знак нерівності змінюється на протилежний
Приклади	
$2^{x-3} > 4.$ ▶ $2^{x-3} > 2^2.$ Функція $y = 2^t$ є зростаючою, отже: $x - 3 > 2; x > 5.$ Відповідь: $(5; +\infty)$. ■	$0,7^{x-3} > 0,49.$ ▶ $0,7^{x-3} > 0,7^2.$ Функція $y = 0,7^t$ є спадною, отже: $x - 3 < 2; x < 5.$ Відповідь: $(-\infty; 5)$. ■

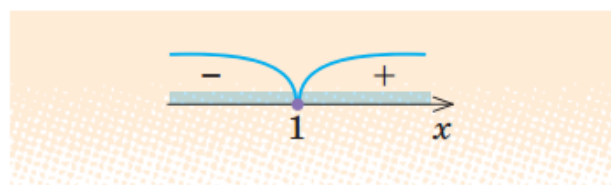
3. Розв'язування показникових нерівностей, які зводяться до найпростіших

Орієнтир	Приклад
<p>I. За допомогою рівносильних перетворень (за схемою розв'язування показникових рівнянь, табл. 3) задана нерівність зводиться до нерівності відомого виду (квадратної, дробової тощо). Після розв'язування одержаної нерівності приходимо до найпростіших показникових нерівностей.</p>	<p style="text-align: center;">$4^{x+1} + 7 \cdot 2^x - 2 > 0.$</p> <p>► $4^x \cdot 4 + 7 \cdot 2^x - 2 > 0;$ $2^{2x} \cdot 4 + 7 \cdot 2^x - 2 > 0.$</p> <p>Виконаємо заміну $2^x = t$, одержимо нерівність $4t^2 + 7t - 2 > 0$, множина її розв'язків $t < -2$ або $t > \frac{1}{4}$ (див. рисунок).</p> <p>У результаті оберненої заміни отримаємо $2^x < -2$ (розв'язків немає) або $2^x > \frac{1}{4}$, звідки $2^x > 2^{-2}$, тобто $x > -2$.</p> <p>Відповідь: $(-2; +\infty)$. ■</p>



II. Застосовуємо загальний метод інтервалів — зводимо задану нерівність до виду $f(x) \geq 0$ і використовуємо таку схему.

1. Знайти ОДЗ.
2. Знайти нулі функції $f(x)$.
3. Позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які ОДЗ розбивається нулями.
4. Записати відповідь, ураховуючи знак нерівності.



$3^x + 4^x > 7.$

► Розв'яжемо нерівність методом інтервалів. Задана нерівність рівносильна нерівності $3^x + 4^x - 7 > 0$.

Позначимо $f(x) = 3^x + 4^x - 7$.

- 1) ОДЗ: $x \in \mathbf{R}$.
- 2) Нулі функції: $f(x) = 0$; $3^x + 4^x - 7 = 0$.
Оскільки функція $f(x) = 3^x + 4^x - 7$ є зростаючою (як сума двох зростаючих функцій), то значення 0 вона набуває тільки в одній точці області визначення: $x = 1$ ($f(1) = 3^1 + 4^1 - 7 = 0$).
- 3) Позначаємо нулі функції на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ (див. рисунок), і записуємо множину розв'язків нерівності $f(x) > 0$.

Відповідь: $(1; +\infty)$. ■

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $0,6^{x^2-7x+6} \geq 1$.

Розв'язання

► $0,6^{x^2-7x+6} \geq 0,6^0$.

Оскільки функція $y = 0,6^t$ є спадною, то $x^2 - 7x + 6 \leq 0$.

Звідси $1 \leq x \leq 6$ (див. рисунок 2.3.2).

Рис. 2.3.2



Відповідь: $[1; 6]$. ■

Коментар

Запишемо праву частину нерівності як степінь числа 0,6, тобто $1 = 0,6^0$.

Оскільки $0,6 < 1$, то при переході від порівняння степенів до порівняння показників степеня знак нерівності змінюється на протилежний (одержуємо нерівність, рівносильну заданій).

Для розв'язування одержаної квадратної нерівності використаємо графічну ілюстрацію.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $3^{\sqrt{x}} - 3^{2-\sqrt{x}} \leq 8$.

Розв'язання

► ОДЗ: $x \geq 0$.

$$3^{\sqrt{x}} - \frac{3^2}{3^{\sqrt{x}}} \leq 8.$$

Виконуємо заміну змінної $3^{\sqrt{x}} = t$ ($t > 0$), в результаті отримуємо нерівність $t - \frac{9}{t} \leq 8$, яка рівносильна нерівності

$$\frac{t^2 - 8t - 9}{t} \leq 0.$$

Оскільки $t > 0$, одержуємо $t^2 - 8t - 9 \leq 0$. Звідси $-1 \leq t \leq 9$. Ураховуючи, що $t > 0$, маємо $0 < t \leq 9$.

Виконуючи обернену заміну, одержуємо $0 < 3^{\sqrt{x}} \leq 9$. Тоді

$$3^{\sqrt{x}} \leq 3^2.$$

Функція $y = 3^t$ зростаюча, отже, $\sqrt{x} \leq 2$. Ураховуючи ОДЗ, одержуємо

$$0 \leq x \leq 4.$$

Відповідь: $[0; 4]$. ■

Коментар

Оскільки рівносильні перетворення нерівностей виконуються на ОДЗ початкової нерівності, то врахуємо цю ОДЗ. Використовуючи формулу

$$a^{u-v} = \frac{a^u}{a^v},$$
 позбуваємося числового доданка в показнику степеня й одержуємо степені

з однією основою 3, що дозволяє виконати заміну змінної $3^{\sqrt{x}} = t$, де $t > 0$.

В одержаній нерівності знаменник є додатним, тому цю дробову нерівність можна звести до рівносильної їй квадратної. Після виконання оберненої заміни треба врахувати не тільки зростання функції $y = 3^t$, а й ОДЗ початкової нерівності.

Приклад 3*. Розв'яжіть нерівність $(3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \leq 0$.

Коментар

Здану нестрогу нерівність зручно розв'язувати методом інтервалів. Записуючи відповідь, треба враховувати, що у випадку, коли ми розв'язуємо нестрогу нерівність $f(x) \leq 0$, усі нулі функції $f(x)$ мають увійти до відповіді.

Розв'язання

► Позначимо $f(x) = (3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8}$.

1) ОДЗ: $x^2 - 2x - 8 \geq 0$. Тоді $x \leq -2$ або $x \geq 4$ (рис. 2.3.3).

2) Нулі функції: $f(x) = 0$;
 $(3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8} = 0$,
тоді $3^x - 9 = 0$ або $\sqrt{x^2 - 2x - 8} = 0$.

Із першого рівняння: $x = 2$ — не входить до ОДЗ;
із другого: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.

3) Позначаємо нулі функції $f(x)$ на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які нулями розбивається ОДЗ (рис. 2.3.4), і записуємо множину розв'язків нерівності $f(x) \leq 0$:
 $x \in (-\infty; -2]$ або $x = 4$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -2] \cup \{4\}$. ■

Рис. 2.3.3



Рис. 2.3.4



Домашнє завдання: розв'язати задачі (в зошиті):

1) Розв'яжіть нерівність:

1) $7^x < \frac{1}{49}$;

3) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} \leq \left(\frac{7}{3}\right)^{4x-21}$;

2) $0,1^x \geq 0,001$;

4) $4 \cdot 0,5^{x^2+3x} < 0,25^{2x}$.

2)

. Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{x-1} + 3^{x-2} - 3^{x-4} \leq 315$;

2) $0,5^{x-2} - 0,5^{x+1} \geq 112$.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com