26.10.2023

Група 21

Математика (алгебра)

Урок 3-4

Тема: Поняття похідної функції в точці. Таблиця похідних

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Границю відношення приросту функції Δf у точці x_0 до приросту аргументу Δx, коли $\Delta x \to 0$, називають *похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0*.

Знайти похідну функції $f(x)$ у точці x_0 за означенням можна за таким алгоритмом:

1) знайти приріст функції $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, що відповідає приросту аргументу Δx;
2) знайти відношення $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ та спростити його;
3) знайти границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Функцію $y = f(x)$, що має похідну в точці x_0, називають *диференційовною* в цій точці. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці деякого проміжку, то кажуть, що функція диференційовна на цьому проміжку. Дію знаходження похідної називають *диференціюванням функції*.

Задача 2. Знайти похідну функції $f(x) = x^2$ в точці $x_0 = 7$.

Розв'язання. 1) $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (7 + \Delta x)^2 - 7^2 = 49 + 14\Delta x + \Delta x^2 - 49 = 14\Delta x + \Delta x^2$;

2) $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{14\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(14 + \Delta x)}{\Delta x} = 14 + \Delta x$;

3) $f'(7) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(14 + \Delta x) = 14$. Відповідь. $f'(7) = 14$.

Задача 3. Нехай $f(x) = C$, де C – число. Тоді за алгоритмом:

1) $\Delta f(x) = C - C = 0$; 2) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$; 3) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 0$.

Отже, $\boldsymbol{C' = 0}$.

Задача 4. Нехай $f(x) = x$. Тоді:

1) $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$;

2) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$; 3) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$. Отже, $\boldsymbol{x' = 1}$.

Задача 5. Нехай $f(x) = x^2$. Тоді:

1) $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$;

2) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$;

3) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$. Отже, $\boldsymbol{(x^2)' = 2x}$.

Похідна функції

C, α – сталі

$(C)' = 0$

$x' = 1$	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(e^x)' = e^x$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Знайдіть похідну функції (573, 574).

573. а) $y = x^{10}$; б) $y = x^{17}$; в) $y = 2x^5$; г) $y = 0{,}1x^{10}$.

а) $y = x^{10}$

$y' = (x^{10})' = 10x^{10-1} = 10x^9$;

б) $y = x^{17}$

$y' = (x^{17})' = 17x^{17-1} = 17x^{16}$;

в) $y = 2x^5$

$y' = (2x^5)' = 2 \cdot 5 \cdot x^{5-1} = 10x^4$;

г) $y = 0{,}1x^{10}$

$y' = (0{,}1 \cdot x^{10})' = 0{,}1 \cdot 10 \cdot x^{10-1} = x^9$.

Знайдіть значення похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 (575, 576).

575. а) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 2\pi$.

а) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$

$f'(x) = (\sin x)' = \cos x$

$f'(x_0) = f'(0) = \cos 0 = 1$;

б) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 2\pi$.

$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x$

$f'(x_0) = f'(2\pi) = -\sin 2\pi = 0$.

579. а) $f(x) = 2(x^3 - 7)$; в) $f(x) = 0{,}2(5 - 3x^4)$;

б) $f(x) = \dfrac{x^2 + 8}{3}$; г) $f(x) = \dfrac{40 - 3x^5}{5}$.

а) $f(x)=2(x^3-7)=2x^3-14$

$f'(x)=(2x^3-14)'=2\cdot 3x^{3-1}-0=6x^2;$

б) $f(x)=\dfrac{x^2+8}{3}=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{8}{3}$

$f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{8}{3}\right)'=\dfrac{1}{3}\cdot 2\cdot x^{2-1}+0=\dfrac{2}{3}x;$

в) $f(x)=0{,}2(5-3x^4)=1-0{,}6x^4$

$f'(x)=(1-0{,}6x^4)'=0-0{,}6\cdot 4\cdot x^{4-1}=-2{,}4x^3;$

г) $f(x)=\dfrac{40-3x^5}{5}=\dfrac{40}{5}-\dfrac{3x^5}{5}=8-\dfrac{3}{5}x^5$

$f'(x)=\left(8-\dfrac{3}{5}x^5\right)'=0-\dfrac{3}{\cancel{5}}\cdot\cancel{5}\cdot x^{5-1}=3x^4.$

Обчисліть значення похідної функції в даних точках (581–583).

581. $f(x)=x^2-5x$, $x_1=1$; $x_2=0$; $x_3=-2$.

$f(x)=x^2-5x$, $x_1=1$; $x_2=0$; $x_3=-2$.

$f'(x)=(x^2-5x)'=2x^{2-1}-5\cdot 1\cdot x^{1-1}=2x^1-5x^0=2x-5\cdot 1=2x-5.$

$f'(1)=2\cdot 1-5=2-5=-3;$

$f'(0)=2\cdot 0-5=-5;$

$f'(-2)=2\cdot(-2)-5=-4-5=-9.$

585. а) $y=x^2+\cos x$; в) $y=x^5+\operatorname{tg} x$; г) $y=\sqrt{x}-\sin x$;

а) $y=x^2+\cos x$

$y'=(x^2+\cos x)'=2\cdot x^{2-1}+(-\sin x)=2x-\sin x;$

б) $y=x^4-\sin x$

$y'=(x^4-\sin x)'=4\cdot x^{4-1}-\cos x=4x^3-\cos x;$

в) $y=x^5+\operatorname{tg} x$

$y'=(x^5+\operatorname{tg} x)'=5\cdot x^{5-1}+\dfrac{1}{\cos^2 x}=5x^4+\dfrac{1}{\cos^2 x};$

г) $y = \sqrt{x} + ctg\, x$

$y' = (\sqrt{x} + ctg\, x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sin^2 x}$

ґ) $y = \sqrt{x} - \sin x$

$y' = (\sqrt{x} - \sin x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\cos^2 x}$

д) $y = \sqrt{x} + \cos x$

$y' = (\sqrt{x} + \cos x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sin^2 x}$.

586. а) $y = x^{2,5}$; б) $y = -x^{0,5}$; в) $y = 2x^{1,7}$; г) $y = x^{-3}$.

а) $y = x^{2,5}$

$y' = (x^{2,5})' = 2,5 \cdot x^{2,5-1} = 2,5x^{1,5} = 2,5x^{\frac{3}{2}} = 2,5\sqrt{x^3}$.

б) $y = -x^{0,5}$

$y' = (-x^{0,5})' = -0,5x^{0,5-1} = -0,5x^{-0,5} = -0,5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{0,5} = -0,5 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

в) $y = 2x^{1,7}$

$y' = (2x^{1,7})' = 2 \cdot 1,7x^{1,7-1} = 2 \cdot 1,7 \cdot x^{0,7} = 3,4x^{\frac{7}{10}} = 3,4\sqrt[10]{x^7}$.

г) $y = x^{-3}$

$y' = (x^{-3})' = -3 \cdot x^{-3-1} = -3x^{-4} = -3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 = -\frac{3}{x^4}$.

Домашнє завдання: розв’язати задачі (в зошиті):

1) Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \cos x$; **2)** $p(x) = x^5$;

3) $\psi(x) = x^{-7}$; **4)** $t(x) = x^{11}$.

2) Продиференціювати:

1) $f(x) = 2x^{11} - 3\cos x + 7$; 2) $g(x) = 5x^7 + \frac{1}{x} - x$.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com