

26.09

Група Б-1

Вища математика

Урок 21-22

Тема: Вектори та операції над ними

Мета:

Навчальна – ознайомити з поняттям векторної алгебри; навчитись здійснювати операції над векторами у просторі; навчитись зображувати алгебраїчні операції геометрично.

Розвивальна – розвинути математичні здібності, увагу, уяву;

Виховна – виховати культуру навчального процесу та математичних записів.

Матеріали до уроку:

1.1. Скалярні та векторні величини

Означення. Величиною можна вважати все те, що виражається в певних одиницях і характеризується своїм чисельним значенням.

Означення. Величини, які характеризуються своїм чисельним значенням в обраній системі одиниць (температура, робота) називаються скалярними.

Означення. Величини, які крім чисельного значення, мають також напрямок в просторі (сила, швидкість), називаються векторними.

Скаляри на вісі зображаються точками, а вектори прийнято позначати за допомогою напрямленого відрізка. Позначення : \overline{AB} , \vec{a} (рис. 1.1)



Рис. 1.1 – Зображення векторів \overline{AB} , \vec{a} .

Довжина вектора (модуль вектора) позначається $|\overline{AB}|$, $|\vec{a}|$. Модуль вектора – скаляр.

Означення. Довжина вектора – це відстань між його початком і кінцем.

Означення. Вектор називається нульовим, якщо його початкова і кінцева точки збігаються.

Означення. Вектори, які мають однакові довжини, але протилежно спрямовані, називаються протилежними.

Вектор, протилежний вектору \vec{a} , позначається $-\vec{a}$.

Означення. Вектори називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій, або на паралельних прямих.

1.2. Додавання векторів

Означення. Сумою двох векторів \vec{a} і \vec{b} називається такий третій вектор \vec{c} , який є діагоналлю паралелограма, що побудований на векторах \vec{a} й \vec{b} , як на сторонах, початок вектора \vec{c} співпадає з початками векторів \vec{a} і \vec{b} ; $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 1.2).

З правила паралелограма виходить правило трикутника: сумою двох векторів \vec{a} і \vec{b} є третій вектор \vec{c} , початок якого співпадає з початком вектора \vec{a} , кінець – з кінцем вектора \vec{b} , якщо початок вектора \vec{b} співпадає з кінцем вектора \vec{a} (рис. 1.3).

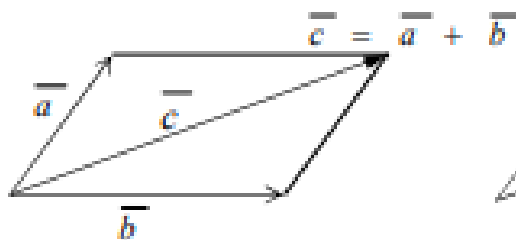


Рис. 1.2 – Додавання векторів за правилом паралелограма

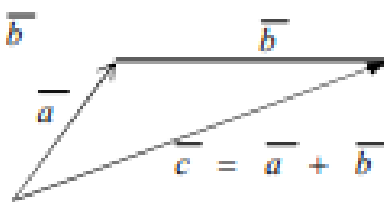


Рис. 1.3 – Додавання векторів за правилом трикутника

Додавання векторів підпорядкується наступним законам:

Комутативний закон : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Асоціативний закон : $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Означення. Вектори називаються компланарними, якщо вони лежать на одній площині або на паралельних площинах.

1.3. Віднімання векторів

Означення. Різницею векторів \vec{a} і \vec{b} називається сума векторів \vec{a} і $(-\vec{b})$, тобто $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Зробимо рисунок

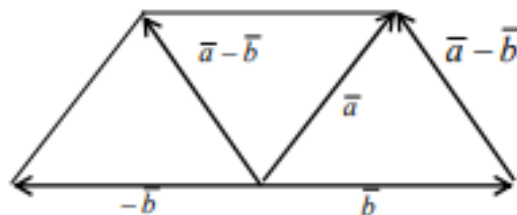


Рис. 1.6.– Різниця двох векторів

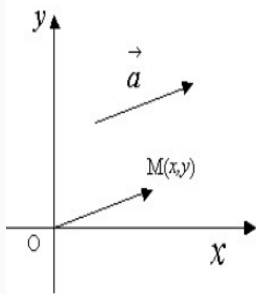
Отже вектор $\vec{a} - \vec{b}$ - це вектор, початок якого співпадає з кінцем вектора \vec{b} , а кінець – з кінцем вектора \vec{a} .

1.4. Множення вектора на скаляр

Нехай є вектор \vec{a} і скаляр α .

Означення. Добутком вектора \vec{a} на скаляр α називається такий вектор $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, який колінеарний \vec{a} , має довжину $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$, спрямований так, як і вектор \vec{a} , якщо $\alpha > 0$, і в протилежний бік, якщо $\alpha < 0$. Якщо $\alpha = 0$, то вектор \vec{b} буде нульовим. Геометрично вектор $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ являє собою лінійнозмінений вектор порівняно з вектором \vec{a} . Якщо $|\alpha| > 1$, то вектор \vec{a} розтягнутий, якщо $|\alpha| < 1$, то вектор \vec{a} стиснутий.

Означення. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається одиничним вектором або *ортом*.



Якщо вектор \vec{a} паралельним переносом розташувати так, щоб його початок співпав з початком декартової системи координат, то координати кінця

$M(x, y)$ ($M(x, y, z)$) називають *координатами вектора* \vec{a} .

Вектор \vec{a} , заданий своїми координатами x, y, z записують у вигляді $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ або $\vec{a} = (x, y, z)$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні, взаємно перпендикулярні вектори (*орти*).

Якщо відомі координати початку $A(x_1, y_1, z_1)$ та кінця $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора, то $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Довжину вектора \vec{a} записують так:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Задача 1. Довести, що точка O є центром ваги трикутника ABC (точкою перетину медіан) тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ **Доведення.** Нехай точка O є точкою перетину медіан AM , BN та CK (рис. 5). Тоді $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = (\vec{OA} + \vec{OB}) + \vec{OC} = \vec{OL} + \vec{OC}$, де OL – діагональ паралелограма $OALB$. Оскільки точка K – середина відрізків AB та OL , то $\vec{OL} = 2\vec{OK}$. За відомою властивістю медіан трикутника $OC = 2OK$, тому $\vec{OC} = -2\vec{OK}$. Отже, $\vec{OL} + \vec{OC} = 2\vec{OK} - 2\vec{OK} = \vec{0}$.

Навпаки, нехай виконується рівність $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$, тобто $\vec{OA} + \vec{OB} = -\vec{OC}$. Тоді $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OL} = 2\vec{OK}$, де K – середина відрізка AB . З рівності $2\vec{OK} = -\vec{OC}$ випливає, що точки C , O та K лежать на одній прямій, а також, що CK – медіана трикутника ABC . Оскільки $CO = 2OK$, то точка O є точкою перетину медіан.

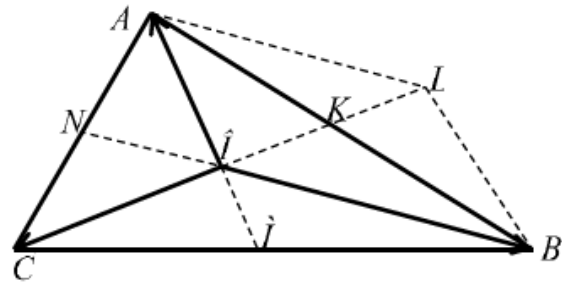


Рис. 5

Домашнє завдання:

Зробити конспект, підготуватись до розв'язання задач практичного змісту

Зворотній зв'язок

Е-mail vitasergiivna1992@gmail.com

!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.