

24.10.2023

Група 21

Математика (геометрія)

Урок 3-4

Тема: Вимірювання кутів у просторі

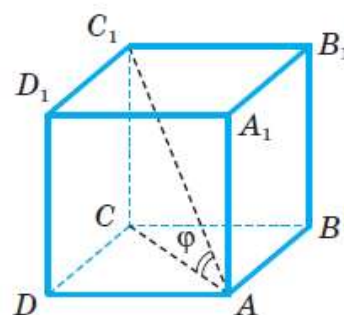
Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Кут між прямою і площиною. Що розуміють під кутом між прямою і площиною?

Якщо пряма паралельна площині, то вважають, що кут між такою прямою і площиною дорівнює 0° . Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між ними дорівнює 90° . У решті випадків кут між прямою і площиною називають кутом між прямою та її ортогональною проекцією на площину.



Мал. 314

До кута між прямою і площиною близьке поняття кута між похилою і площиною.

Кутом між похилою і площиною називають кут між похилою та її проекцією на площину.

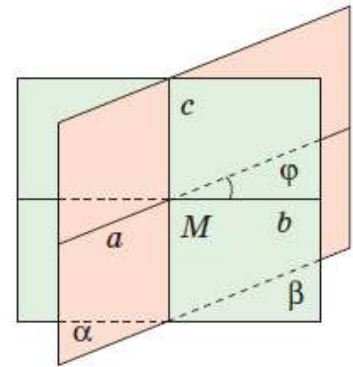
Йдеться про прямокутну (ортогональну) проекцію. Якщо φ — кут між прямою і площиною, то $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$; якщо φ — кут між похилою і площиною, то $0^\circ < \varphi < 90^\circ$.

Можна довести, що кут між похилою і площиною найменший з усіх кутів, які похила утворює з прямими, проведеними на площині через основу похилої.

Кут між площинами. Ви вже знаєте з п. 30, як знайти кут між площинами. Якщо дві площини паралельні, то вважають, що кут між ними

дорівнює 0° . Якщо площини α і β перетинаються по прямій c , то, щоб визначити кут між цими площинами, у кожній з них через довільну точку M прямої c можна провести прямі a і b , перпендикулярні до прямої c (мал. 318).

Кут між прямими a і b приймають за кут між даними площинами α і β . Можна довести, що міра цього кута φ не залежить від вибору точки O на прямій c . Кут між двома площинами, як і між двома прямими, знаходиться в межах від 0° до 90° .



Мал. 318

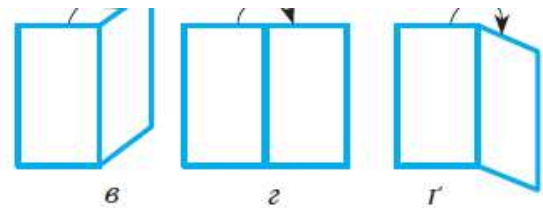
Якщо кут між двома площинами дорівнює 90° , то площини перпендикулярні.

Якщо дві площини перетинаються, то вони весь простір поділяють на 4 частини, які називають двограними кутами.

Півплощини, які обмежують двограний кут, називають його гранями, а їх спільну пряму — ребром двогранного кута (мал. 319). Фігуру, утворену двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує, також називають двограним кутом.

!
Двогранным кутом називають частину простору, обмежену двома півплощинами, які виходять з однієї прямої.

Кут, утворений перетином двогранного кута з площиною, перпендикулярною до його ребра, називають *лінійним кутом* даного двогранного кута. Будь-які два лінійні кути двогранного кута рівні (мал. 320). Тому двогранні кути можна характеризувати відповідними лінійними кутами. Якщо, наприклад, лінійний кут деякого двогранного кута дорівнює 60° , то кажуть, що це — двограний кут 60° . Двогранный кут називають гострим, прямим, тупим, розгорнутим чи більшим від розгорнутого залежно від того, чи є його лінійний кут гострим, прямим, тупим, розгорнутим чи більшим від розгорнутого (мал. 321).



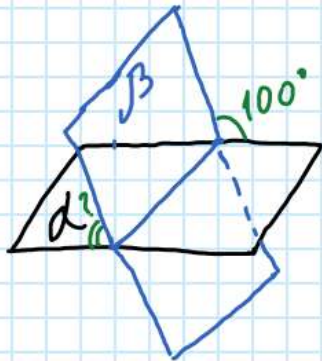
Мал. 321

1182. На малюнку 314 AC_1 — діагональ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Під яким кутом нахилена діагональ куба до кожної його грані?

Розв'язання

Якщо провести площину (ACC_1) , то побачимо, що $ACC_1 A_1$ — квадрат, а AC — діагональ квадрата. Діагоналі квадратів є бісектрисами відповідних кутів, а тому $\angle CA_1 C_1 = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

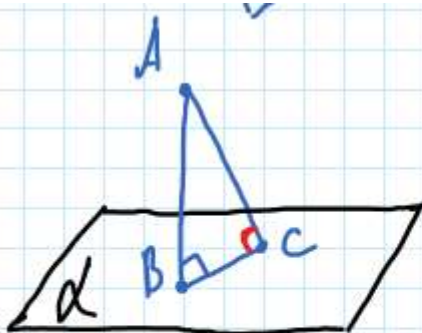
1186. Кут між двома площинами дорівнює 100° . Укажіть міру меншого з утворених двогранних кутів.



Розв'язання

Дані кути є суміжними, а отже в сумі маємо оприямани 180° . Тоді $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

1191. Похила вдвічі довша за її проекцію на площину. Знайдіть кут між похилою і площиною.



Дано: $AB \perp \alpha$, AC - похила,
 $AC = 2BC$.

Знайши: $\angle ACB$.

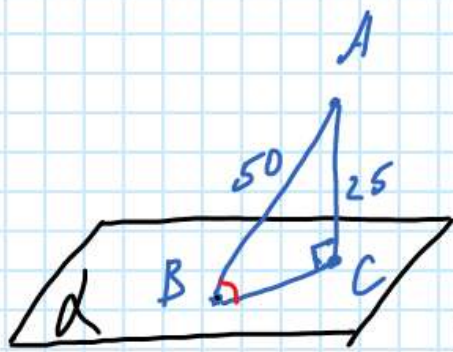
Розв'язання

Розглянемо $\triangle ABC$. Якщо гіпотенуза AC вдвічі довша за катет BC , то кут навпроти цього катета 30° . Отже, $\angle BAC = 30^\circ$.

$\angle BAC + \angle ACB = 90^\circ$ за властивістю гострих кутів прямокутного трикутника, а отже $\angle ACB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Відповідь: $\angle ACB = 60^\circ$.

1195. Довжина похилої AB дорівнює 50 см, а точка A віддалена від площини на 25 см. Знайдіть кут між похилою і площиною.
1196. Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних площин під кутом α , то і другу площину вона перетинає під кутом α .



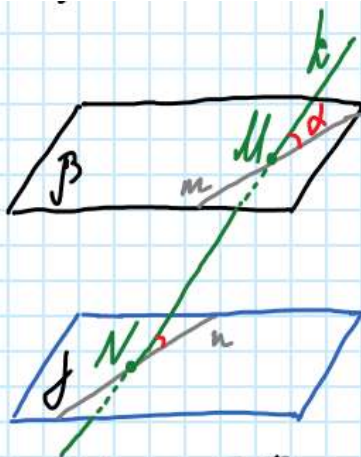
Дано: AB - гіпотенуза,
 $AB = 50$ см, $AC \perp d$,
 $AC = 25$ см.

Знайти: $\angle BAC$.

Розв'язання

Розглянемо $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$). У цьому трикутнику
 $AC = \frac{AB}{2}$, тобто половині гіпотенузи, а отже
 $\angle ABC = 30^\circ$.

Відповідь: $\angle BAC = 30^\circ$.



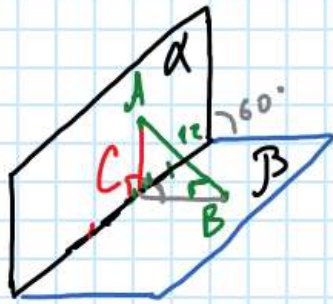
Дано: $\beta \parallel \gamma$, $m \subset \beta$, $n \subset \gamma$,
 $k \cap \beta = M$, $k \cap \gamma = N$,
 $\angle(k, m) = \alpha$.

Довести: $\angle(k, n) = \alpha$

Доведення

Оскільки $m \subset \beta$, а $n \subset \gamma$, то $m \parallel n$ за властивістю
 паралельності площин. Тоді $\angle(k, m)$ та $\angle(k, n)$ —
 внутрішні рівносторонні кути при $m \parallel n$ та січній k .
 А тому $\angle(k, m) = \angle(k, n) = \alpha$.

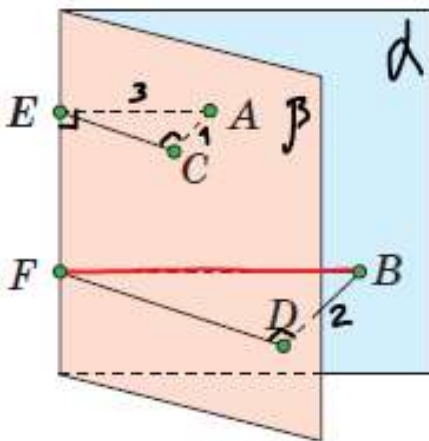
1201. Дано двогранний кут 60° . Точка A однієї його грані віддалена на 12 см від іншої. Знайдіть відстань від точки A до ребра даного двогранного кута.



Дано: $\angle(\alpha, \beta) = 60^\circ$,
 $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $AB = 12$ см,
 $AC \perp \beta$.
 Знайти: AC .

Розв'язання
 $\angle ACB = 60^\circ$, $AB \perp \beta$. Тоді $AC = \frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{12}{\sin 60^\circ} =$
 $= \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$ см
 Відповідь: $AC = 8\sqrt{3}$ см.

1212. На одній грані двогранного кута дано дві точки A і B (мал. 327). З них опущено перпендикуляри на другу грань: $AC = 1$ дм, $BD = 2$ дм та на ребра: $AE = 3$ дм і BF . Знайдіть BF .



Мал. 327

Дано: $A \in \alpha$, $B \in \beta$,
 $AC \perp \beta$, $AC = 1$ дм,
 $BD \perp \beta$, $BD = 2$ дм,
 $AE \perp EF$, $AE = 3$ дм.
 Знайти: BF

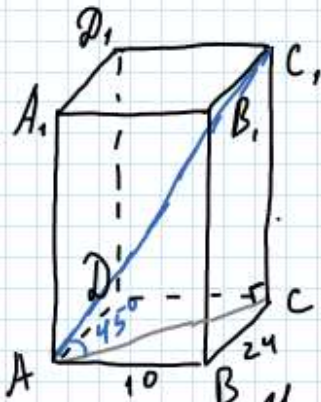
Розв'язання
 Розглянемо $\triangle AEC$ і $\triangle BFD$.
 Рух: $\angle C = \angle D = 90^\circ$,

$\angle AEC = \angle BFD$ як лінійні кути двогранного кута. А отже $\triangle AEC \sim \triangle BFD$ за двома кутами.
 Тому $\frac{AC}{BD} = \frac{AE}{BF}$.

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{BF} \Rightarrow BF = \frac{3 \cdot 2}{1} = 6 \text{ дм}$$

Відповідь: $BF = 6$ дм.

1221. Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з площиною його основи кут 45° . Сторони основи дорівнюють 10 см і 24 см. Визначте висоту паралелепіпеда.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямокутний паралелепіпед, $\angle C_1AC = 45^\circ$,
 $AB = 10$ см, $BC = 24$ см.
 Знайти: CC_1

Розв'язання

Розглянемо $\triangle AC_1C$ ($\angle C = 90^\circ$).

У цьому $\triangle AC_1C$ $\angle C_1AC = 45^\circ$, а отже $\angle AC_1C = 90^\circ - \angle C_1AC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Тоді $\triangle AC_1C$ - рівнобедрений, тому $AC = CC_1$.

Розглянемо $\triangle ACB$ ($\angle B = 90^\circ$). У цьому:

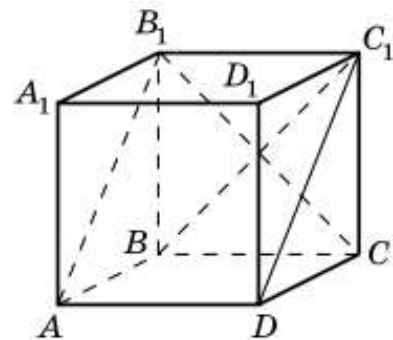
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = 26 \text{ см}$$

$$CC_1 = AC = 26 \text{ см}$$

Відповідь: $CC_1 = 26$ см.

Домашнє завдання: розв'язати задачі (в зошиті):

- Із точки до площини проведено похилу завдовжки 16 см. Знайдіть кут, який утворює похила з площиною, якщо перпендикуляр, проведений з точки до площини, дорівнює $8\sqrt{2}$ см.
- $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб (див. рис.). Знайти кути, які утворює пряма AB з прямими B_1C і D_1C_1 .



Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com