

22.09.2023

Група 26

Математика (алгебра)

Урок 5-6

Тема: Правила диференціювання. Похідна складеної функції

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, вміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

### Матеріали до уроку:



Функцію  $y = f(h(x))$  називають складеною,  $u = h(x)$  — її внутрішньою функцією, а  $f(u)$  — зовнішньою.

Складеними функціями описують, наприклад, синусоїдний струм — струм, що змінюється у часі за синусоїдним законом:

$$I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right).$$
 Саме такий вид струму

уможливлює найбільш економічне здійснення виробництва, передавання, розподіл і використання електричної енергії.

Розглядаючи у функції  $y = f(u)$  змінну  $u$  як аргумент, можна знайти похідну цієї функції по  $u$ . Її позначатимемо знаком  $y'_u$ . Похідні функцій по  $x$ , як і раніше, позначатимемо символами  $y'$ ,  $u'$ .

У курсі математичного аналізу доводять теорему про похідну складеної функції.



Нехай дано функцію  $y = f(u)$ , де  $u = h(x)$ . Якщо в якійсь точці  $x$  існує похідна  $u'$  та у відповідній точці  $u$  існує похідна  $y'_u$ , то існує також похідна  $y'$ , причому  $y' = y'_u \cdot u'$ .

Якщо ж дана складена функція  $y = f(h(x))$  диференційовна в кожній точці  $x$  деякого проміжку, то рівність  $y' = y'_u \cdot u'$  справджується для всього проміжку. Отже, користуючись цією рівністю, можна знаходити похідну даної функції і як функцію, задану на цьому проміжку.

*Приклад 1.* Знайдіть похідну функції  $y = (2x + 1)^{10}$ .

17. Знайдіть похідну функції:

1)  $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$ ;

2)  $y = \sqrt{x}(3x^2 + 2)$ ;

3)  $y = (\sqrt{x} + 1)(3 - 2\sqrt{x});$

5)  $y = x^2 \sin x;$

4)  $y = (x^2 - 3x + 1)(x^4 - 3x + 2);$

6)  $y = 3x \operatorname{tg} x.$

1)  $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$

$$y' = (x^3 - 2)' \cdot (x^2 + 1) + (x^3 - 2) \cdot (x^2 + 1)' = 3x^2(x^2 + 1) + 2x(x^3 - 2) =$$

$$= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 - 4x = 5x^4 + 3x^2 - 4x$$

2)  $y = \sqrt{x}(3x^2 + 2)$

$$y' = (\sqrt{x})'(3x^2 + 2) + \sqrt{x}(3x^2 + 2)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (3x^2 + 2) + 3x^2 \sqrt{x} + 2\sqrt{x} =$$

$$= \frac{3x^2 + 2 + 6x^2 \cdot (\sqrt{x})^2 + 4 \cdot (\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} = \frac{3x^2 + 2 + 6x^2 \cdot x + 4 \cdot x}{2\sqrt{x}} = \frac{6x^3 + 3x^2 + 4x + 2}{2\sqrt{x}}$$

3)  $y = (\sqrt{x} + 1)(3 - 2\sqrt{x})$

$$y' = (\sqrt{x} + 1)'(3 - 2\sqrt{x}) + (\sqrt{x} + 1)(3 - 2\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (3 - 2\sqrt{x}) +$$

$$+ (-2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}})(\sqrt{x} + 1) = \frac{3 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} -$$

$$- \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{x}} - 2.$$

4)  $y = (x^2 - 3x + 1)(x^4 - 3x + 2)$

$$y' = (x^2 - 3x + 1)'(x^4 - 3x + 2) + (x^2 - 3x + 1)(x^4 - 3x + 2)' =$$

$$= (2x - 3)(x^4 - 3x + 2) + (4x^3 - 3)(x^2 - 3x + 1) =$$

$$= 2x^5 - 6x^2 + 4x - 5x^4 + 9x - 6 + 4x^5 - 12x^4 + 4x^3 - 3x^2 +$$

$$+ 9x - 3 = 6x^5 - 15x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 22x - 9$$

5)  $y = x^2 \sin x$

$$y' = (x^2)' \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

18. Знайдіть похідну функції:

1)  $y = \frac{3x - 7}{5 - 2x};$

4)  $y = \frac{2x^2 + 3x}{x^2 - 4};$

7)  $y = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x};$

2)  $y = \frac{4x + 1}{x^2 - 2};$

5)  $y = \frac{x - 1}{\sqrt{x}};$

8)  $y = \frac{3 \cos x}{x^3}.$

3)  $y = \frac{x^2 + 5x}{x - 3};$

6)  $y = \frac{\sqrt{x}}{4x - 1};$

$$1) y = \frac{3x-4}{5-2x}$$

$$y' = \frac{(3x-4)'(5-2x) - (3x-4)(5-2x)'}{(5-2x)^2} = \frac{3(5-2x) - (-2) \cdot (3x-4)}{(5-2x)^2} = \frac{15-2x+6x-14}{(5-2x)^2} = \frac{4x+1}{(5-2x)^2}$$

$$3) y = \frac{x^2+5x}{x-3}$$

$$y' = \frac{(x^2+5x)'(x-3) - (x^2+5x)(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{(2x+5)(x-3) - 1 \cdot (x^2+5x)}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x+5x-15-x^2-5x}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x-15}{(x-3)^2}$$

$$5) y = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{(x-1)' \cdot \sqrt{x} - (x-1) \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{1 \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x-1)}{x} = \frac{2 \cdot (\sqrt{x})^2 - x + 1}{2\sqrt{x} \cdot x} = \frac{2x - x + 1}{2\sqrt{x} \cdot x} = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$$

$$7) y = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$$

$$y' = \frac{(1-\sin x)'(1+\sin x) - (1-\sin x)(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\cos x(1+\sin x) - \cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\cos x(1+\sin x+1-\sin x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

23. Знайдіть похідну функції:

$$1) y = (3-x)^5;$$

$$4) y = 3(x-2)^5 + 2(1-x)^4;$$

$$2) y = (6x^5 - 2x)^8;$$

$$5) y = \sqrt{2x-1};$$

$$3) y = \frac{1}{(x^2-3x)^3};$$

$$6) y = \sqrt{x^3-2x}.$$

$$1) y = (3-x)^5$$

$$y' = ((3-x)^5)' \cdot (3-x)' = 5(3-x)^4 \cdot (-1) = -5(3-x)^4$$

$$2) y = (6x^5-2x)^8$$

$$y' = ((6x^5-2x)^8)' \cdot (6x^5-2x)' = 8(6x^5-2x)^7 \cdot (6 \cdot 5x^4 - 2) = 8(6x^5-2x)^7 \cdot (30x^4 - 2) = 16(6x^5-2x)^7 \cdot (15x^4 - 1)$$

$$3) y = \frac{1}{(x^2-3x)^3} = (x^2-3x)^{-3}$$

$$y' = ((x^2-3x)^{-3})' \cdot (x^2-3x)' = -3(x^2-3x)^{-4} \cdot (2x-3) =$$

$$= \frac{-3}{(x^2-3x)^4} \cdot (2x-3) = \frac{-6x+9}{(x^2-3x)^4}$$

$$4) y = 3(x-2)^5 + 2(1-x)^4$$

$$y' = (3(x-2)^5 + 2(1-x)^4)' \cdot (x-2)' \cdot (1-x)' = (15(x-2)^4 + 8(1-x)^3) \cdot 1 \cdot (-1) = -15(x-2)^4 - 8(1-x)^3$$

$$5) y = \sqrt{2x-1}$$

$$y' = (\sqrt{2x-1})' \cdot (2x-1)' = \frac{1}{2\sqrt{2x-1}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$6) y = \sqrt{x^3-2x}$$

$$y' = (\sqrt{x^3-2x})' \cdot (x^3-2x)' = \frac{1}{2\sqrt{x^3-2x}} \cdot (3x^2-2) = \frac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x}}$$

24. Обчисліть значення похідної даної функції в точці  $x_0$ :

1)  $f(x) = (x^2 - 5x + 1)^{10}$ ,  $x_0 = 0$ ;      3)  $f(x) = \sqrt{5x^2 - 2x}$ ,  $x_0 = 2$ ;

2)  $f(x) = (\sqrt{x} - 1)^5$ ,  $x_0 = 4$ ;      4)  $f(x) = \frac{3x^2 - 7}{\sqrt{2x - 3}}$ ,  $x_0 = 2$ .

$$1) f(x) = (x^2 - 5x + 1)^{10}, x_0 = 0$$

$$f'(x) = ((x^2 - 5x + 1)^{10})' \cdot (x^2 - 5x + 1)' = 10(x^2 - 5x + 1)^9 \cdot (2x - 5) =$$

$$= (20x - 50)(x^2 - 5x + 1)^9$$

$$f'(0) = (20 \cdot 0 - 50)(0^2 - 5 \cdot 0 + 1)^9 = -50 \cdot 1^9 = -50$$

$$2) f(x) = (\sqrt{x} - 1)^5, x_0 = 4$$

$$f'(x) = ((\sqrt{x} - 1)^5)' \cdot (\sqrt{x} - 1)' = 5(\sqrt{x} - 1)^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5(\sqrt{x} - 1)^4}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(4) = \frac{5(\sqrt{4} - 1)^4}{2 \cdot \sqrt{4}} = \frac{5(2 - 1)^4}{2 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 1}{4} = \frac{5}{4} = 1,25$$

$$3) f(x) = \sqrt{5x^2 - 2x}, x_0 = 2$$

$$f'(x) = (\sqrt{5x^2 - 2x})' \cdot (5x^2 - 2x)' = \frac{1}{2\sqrt{5x^2 - 2x}} \cdot (5 \cdot 2x - 2) = \frac{2(5x - 1)}{2\sqrt{5x^2 - 2x}} = \frac{5x - 1}{\sqrt{5x^2 - 2x}}$$

$$f'(2) = \frac{5 \cdot 2 - 1}{\sqrt{5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2}} = \frac{10 - 1}{\sqrt{20 - 4}} = \frac{9}{\sqrt{16}} = \frac{9}{4} = 2,25$$



26. Обчисліть значення похідної даної функції в точці  $x_0$ :

1)  $f(x) = \sin \frac{x}{5}$ ,  $x_0 = \frac{5\pi}{6}$ ;

3)  $f(x) = \cos^4 3x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{9}$ ;

2)  $f(x) = \operatorname{tg} x^2$ ,  $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ;

4)  $f(x) = 3x \sin 2x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ .

1)  $f(x) = \sin \frac{x}{5}$ ,  $x_0 = \frac{5\pi}{6}$

$$f'(x) = \left(\sin \frac{x}{5}\right)' \cdot \left(\frac{x}{5}\right)' = \cos \frac{x}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cos \frac{x}{5}$$

$$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{5} \cdot \cos \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{5} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{10}$$

2)  $f(x) = \operatorname{tg} x^2$ ,  $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

$$f'(x) = \left(\operatorname{tg} x^2\right)' \cdot (x^2)' = \frac{1}{\cos^2 x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{\cos^2 x^2}$$

$$f'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\cos^2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{\pi}}{1} = \frac{2\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{2\pi}$$

Домашнє завдання: розв'язати задачі (в зошиті):

1) Знайти похідні функцій:

1)  $f(x) = (5x^2 - 9)(3x + 4)$ ;

2)  $g(x) = (3x - 5x^2)\sqrt{x}$ .

1)  $g(x) = \frac{8x + x^2}{x - 1}$ ;

2)  $g(x) = \frac{3 + x^3}{x^4}$ .

**Зворотній зв'язок:**

**E-mail** [t.anastasia.igorivna@gmail.com](mailto:t.anastasia.igorivna@gmail.com)