

**21.11.2023**

**Група 23**

**Математика (геометрія)**

**Урок 17-18**

**Тема: Піраміда**

**Мета:**

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

**Матеріали до уроку:**

**Означення.** Многогранник, одна грань якого —  $n$ -кутник, а решта граней — трикутники, що мають спільну вершину, називають  **$n$ -кутною пірамідою**.

Нагадаємо, що трикутники, які мають спільну вершину, називають бічними гранями піраміди, а саму спільну вершину — вершиною піраміди;  $n$ -кутник, про який ідеться в означенні,

називають основою піраміди, а його сторони — ребрами основи піраміди; ребра, які не належать основі, називають бічними ребрами піраміди (рис. 18.1).



Рис. 18.1

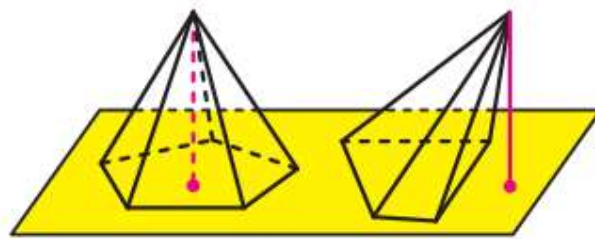


Рис. 18.2

Висотою піраміди називають перпендикуляр, опущений із вершини піраміди на площину основи (рис. 18.2).

Розглянемо опуклу  $n$ -кутну піраміду ( $n > 3$ ). Переріз піраміди площиною, яка проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані, перетинає основу піраміди по діагоналі (рис. 18.3). Такий переріз називають **діагональним перерізом піраміди**.

Діагональним перерізом піраміди є трикутник.

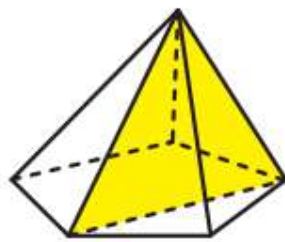


Рис. 18.3

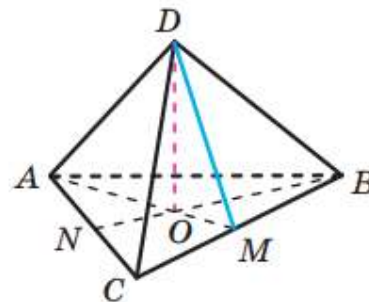


Рис. 18.4

**Означення.** Піраміду називають **правильною**, якщо її основа — правильний багатокутник і основа висоти піраміди є центром цього багатокутника.

На рисунку 18.4 зображено правильну трикутну піраміду  $DABC$  з основою  $ABC$ . Трикутник  $ABC$  є рівностороннім. Проекцією вершини  $D$  на площину  $ABC$  є центр трикутника — точка  $O$ . Для знаходження цієї точки на рисунку 18.4 проведено медіани  $AM$  і  $BN$  трикутника  $ABC$ .

На рисунку 18.5 зображено правильну чотирикутну піраміду  $EABCD$ . Чотирикутник  $ABCD$  є квадратом, точка  $O$  — його центр, відрізок  $EO$  — висота піраміди. Оскільки центр квадрата збігається з точкою перетину його діагоналей, то можна зробити такий висновок: проєкція вершини правильної чотирикутної піраміди на площину основи — це точка перетину діагоналей квадрата, який є основою піраміди.

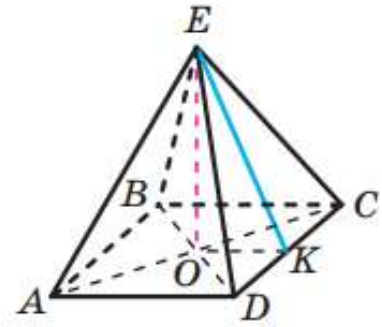


Рис. 18.5

Правильну трикутну піраміду, у якої всі грані рівні, називають **правильним тетраедром**.

Зазначимо деякі властивості правильної піраміди.

*Усі бічні ребра правильної піраміди рівні, усі бічні грані правильної піраміди — рівні рівнобедрені трикутники (доведіть це самостійно).*

**Апофемою** правильної піраміди називають висоту бічної грані, проведену з вершини піраміди.

На рисунку 18.4 проведено відрізок  $DM$ , де точка  $M$  — середина ребра  $BC$ . Оскільки трикутник  $BCD$  — рівнобедрений з основою  $BC$ , то відрізок  $DM$  є його висотою. Отже, відрізок  $DM$  — апофема правильної трикутної піраміди  $DABC$ .

На рисунку 18.5 відрізок  $EK$ , де точка  $K$  — середина ребра  $DC$ , є апофемою правильної чотирикутної піраміди  $EABCD$ .

*Усі апофемі правильної піраміди рівні.*

**18.1.°** Скільки  $n$ -кутна піраміда має:

1) вершин;                      2) граней;                      3) ребер?

*1) 1 вершину; 2)  $n$  граней; 3)  $2n$  ребер.*

**18.5.°** Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут  $60^\circ$ . Знайдіть висоту піраміди.

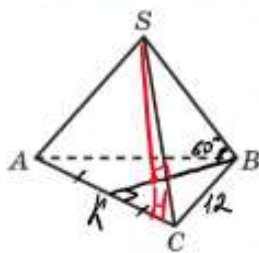


Рис. 18.8

Дано:  $SABC$  - піраміда,  $BC = 12$  см,  
 $\angle SBK = 60^\circ$ ,  $SH$  - висота,  
 $AB = BC = AC$ ,  $SA = SC = SB$ .  
 Знайми:  $SH$ .

Розв'язання

Розм.  $\triangle ABC$ :  $AB = BC = AC = 12$  см за  
 в. рівностороннього трикутника.

$BK$  - медіана, висота і бісектриса за в. рівностороннього трикутника.

$$\text{Тоді } CK = \frac{AC}{2}, CK = \frac{12}{2} = 6 \text{ (см).}$$

$\angle K = 90^\circ$ , отже за теоремою Піфагора

$$BK^2 = BC^2 - CK^2$$

$$BK^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$$

$$BK = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \text{ (см)}$$

$BH : HK = 2 : 1$  за властивістю медіани  $\Delta$ .

Нехай  $BH = 2x$  см, тоді  $HK = x$  см.

$$BH + HK = 6\sqrt{3}, \text{ тоді } 2x + x = 6\sqrt{3}$$

$$3x = 6\sqrt{3}$$

$$x = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \text{ (см)} - HK$$

$$BH = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ (см).}$$

$$\text{Розм. } \triangle SBH (\angle H = 90^\circ): \operatorname{tg} \angle B = \frac{SH}{BH}$$

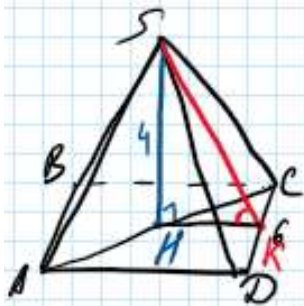
$$SH = BH \cdot \operatorname{tg} \angle B$$

$$SH = 4\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot 3 = 12 \text{ (см)}$$

Відповідь:  $SH = 12$  см.

18.7.° Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см, а висота піраміди — 4 см. Знайдіть:

- 1) апофему піраміди;
- 2) двогранний кут піраміди при ребрі основи.



Дано:  $SABCD$  - піраміда,  
 $SH$  - висота,  $SH = 4$  см,  $CD = AB = BC =$   
 $= AD = 6$  см,  $SK$  - апофема.  
 Знайти:  $SK$ ,  $\angle SKH$ .

Розв'язання

1) Розм.  $\square ABCD$ :  $HK = \frac{AD}{2}$  за вл. квадрата.

$$HK = \frac{6}{2} = 3 \text{ (см).}$$

Розм.  $\triangle SKH$  ( $\angle H = 90^\circ$ ): за теор. Піфагора

$$SK^2 = HK^2 + SH^2$$

$$SK^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$SK = \sqrt{25} = 5 \text{ (см).}$$

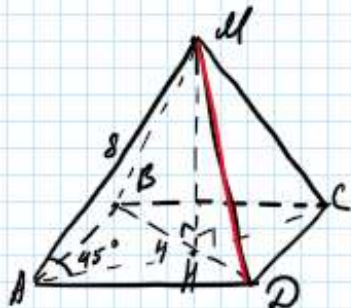
$$2) \sin \angle SKH = \frac{SH}{SK}$$

$$\sin \angle SKH = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\angle SKH = \arcsin 0,8$$

Відповідь:  $SK = 5$  см,  $\angle SKH = \arcsin 0,8$ .

- 18.14. Основою піраміди  $MABCD$  є паралелограм  $ABCD$ , діагональ  $BD$  якого дорівнює 4 см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи, а бічне ребро  $MA$ , що дорівнює 8 см, утворює з площиною основи кут  $45^\circ$ . Знайдіть ребро  $MD$ .



Дано:  $MABCD$  - піраміда,  
 $ABCD$  - паралелограм,  
 $BD = 4$  см,  $\angle MAH = 45^\circ$ ,  
 $MA = 8$  см.

Знайти:  $MD$ .

Розв'язання

$BH = HD = \frac{BD}{2}$  за вл. точки перетину діагоналей паралелограма.

$$BH = HD = \frac{4}{2} = 2 \text{ (см).}$$

Розм.  $\triangle MAH$  ( $\angle H = 90^\circ$ ):  $\sin \angle A = \frac{MH}{MA}$

$$MH = MA \sin \angle A$$

$$MH = 8 \cdot \sin 45^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \text{ (см).}$$

Розм.  $\triangle MDH$  ( $\angle H = 90^\circ$ ): за теор. Піфагора

$$MD^2 = MH^2 + HD^2 \quad MD^2 = (4\sqrt{2})^2 + 2^2 = 16 \cdot 2 + 4 = 32 + 4 = 36$$

$$MD = \sqrt{36} = 6 \text{ (см)} \quad \text{Відповідь: } MD = 6 \text{ см.}$$

Домашнє завдання: розв'язати задачі (в зошиті):

- 1) **!** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $3\sqrt{2}$  см, а висота – 8 см. Знайдіть площу діагонального перерізу цієї піраміди.
- 2) **!** Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $4\sqrt{3}$  см і утворює з площиною основи кут  $60^\circ$ . Знайдіть висоту піраміди і сторону її основи.

**Зворотній зв'язок:**

**E-mail** [t.anastasia.igorivna@gmail.com](mailto:t.anastasia.igorivna@gmail.com)