

20.11.2023

Група 32

Математика (геометрія)

Урок 15-16

**Тема:** Повторення з теми «Паралельність та перпендикулярність прямих та площин у просторі». Підготовка до НМТ

**Мета:**

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати знання з фізики під час розв'язування прикладних задач; формувати уяву про процеси у природі;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення фізики та астрономії; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення фізики та астрономії, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

### Матеріали до уроку:

**Задача 1 (ЗНО 2017).** Точка  $A$  належить площині  $\alpha$ . Які з наведених тверджень правильними?

I. Через точку  $A$  можна провести пряму, перпендикулярну до площини  $\alpha$ .

II. Через точку  $A$  можна провести площину, перпендикулярну до площини  $\alpha$ .

III. Через точку  $A$  можна провести площину, паралельну площині  $\alpha$ .

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II та III	лише II	лише I та II	I, II та III

**Відповідь:** твердження III не є правильним, оскільки через точку, яка належить площині, неможливо провести площину, паралельну площині  $\alpha$ , бо ж через точку  $A$  неможливо провести пряму, паралельну площині  $\alpha$ : вони у будь-якому випадку будуть перетинатись. Тому правильним є варіант Г.

**Задача 2 (ЗНО 2016).** Прямі  $a$  і  $b$  – мимобіжні. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Прямі  $a$  і  $b$  перетинаються.

II. Прямі  $a$  і  $b$  лежать в одній площині.

III. Існує пряма, паралельна прямій  $a$ , що перетинає пряму  $b$ .

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II	лише I і II	лише III	I, II та III

**Відповідь:** твердження I не є правильним, оскільки мимобіжні прямі не можуть перетинатись; твердження II не є правильним, оскільки мимобіжні прямі не лежать в одній площині. Отже, правильним є лише III твердження, тому відповідь варіант Г.

**Задача 3 (ЗНО 2017 Д).** Площини  $\alpha$  і  $\beta$  – паралельні. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Існує пряма, що лежить і в площині  $\alpha$ , і в площині  $\beta$ .

II. Якщо пряма перпендикулярна до площини  $\alpha$ , то вона перпендикулярна до площини  $\beta$ .

III. Якщо пряма лежить у площині  $\alpha$ , то вона паралельна будь-якій прямій у площині  $\beta$ .

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише I та II	лише II	лише II та III	лише III

**Відповідь:** твердження I не є правильним, оскільки пряма не може лежати одночасно в двох паралельних площинах, вона може лише їх перетинати; твердження II є правильним, оскільки за аксіомами планіметрії пряма, що перпендикулярна до однієї з прямих, перпендикулярна і до іншої, тому з площинами це так само; твердження III є правильним за аксіомами стереометрії, тому правильний варіант Г.

**Задача 4 (ЗНО 2013).** Які з наведених тверджень є правильними?

I. Через дві прямі, що перетинаються, можна провести лише одну площину.

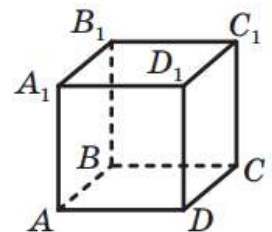
II. Через точку, що не належить одній площині, можна провести безліч прямих, паралельних цій площині.

III. Якщо дві різні площини паралельні одній і тій самій прямій, то вони паралельні.

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише I та II	лише I та III	лише II та III	I, II та III

**Відповідь:** твердження I є правильним за аксіомами стереометрії; твердження II є правильним, оскільки через точку, що не належить площині, можна провести площину, яка паралельна даній, і у цій площині провести безліч прямих, що є паралельними даній площині; твердження III є правильним за аксіомами стереометрії. Отже, правильним є варіант Д.

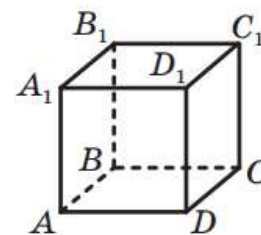
**Задача 5 (ЗНО 2011).** На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Укажіть серед поданих нижче пряму, що утворює з прямою  $CD_1$  пару мимобіжних прямих.



А	Б	В	Г	Д
$A_1 B$	$C_1 D$	$B_1 C$	$AB$	$CD$

**Відповідь:** твердження I є правильним за аксіомами стереометрії; твердження II є правильним, оскільки через точку, що не належить площині, можна провести площину, яка паралельна даній, і у цій площині провести безліч прямих, що є паралельними даній площині; твердження III є правильним за аксіомами стереометрії. Отже, правильним є варіант Д.

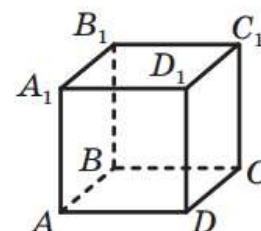
**Задача 6 (ЗНО 2014 П).** На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , ребро якого дорівнює 1 см. Обчисліть відстань від точки  $A$  прямої  $B_1 C_1$ .



А	Б	В	Г	Д
1 см	3 см	$\sqrt{2}$ см	3 см	1,5 см

**Відповідь:** відстань від точки  $A$  до прямої  $B_1 C_1$  – це пряма  $AB_1$ . Пряма  $AB_1$  є діагоналлю квадрата  $AA_1 B_1 B$  з ребром 1 см, тому  $AB_1 = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$  см. Отже, відповідь варіант **В**.

**Задача 7 (ЗНО 2015).** На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Яка з наведених прямих паралельна площині  $(AA_1 B_1)$ ?

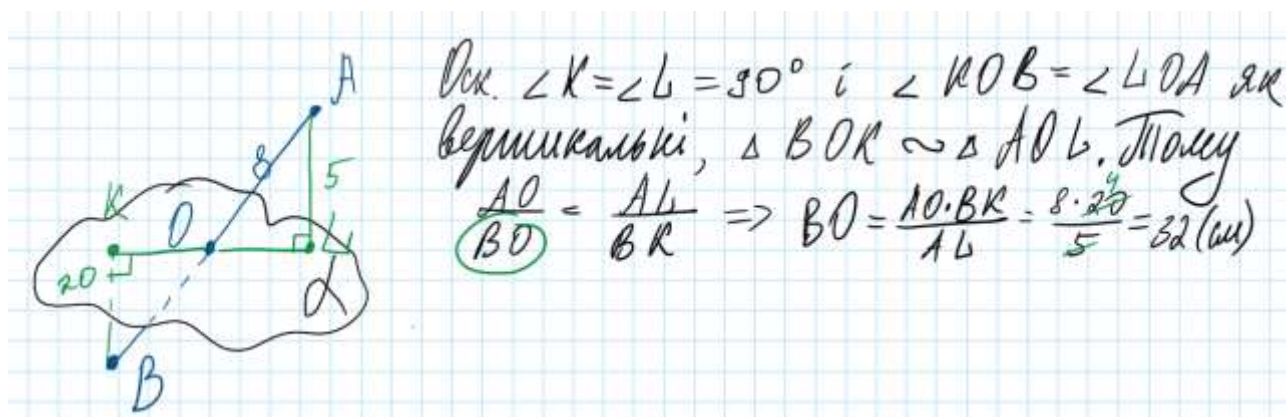


А	Б	В	Г	Д
$BC$	$BD$	$C_1 D$	$CB_1$	$A_1 B$

**Відповідь:** пряма  $BC$  перетинає площину  $(AA_1 B_1)$ , пряма  $BD$  також перетинає дану площину, пряма  $CB_1$  також, пряма  $A_1 B$  належить даній площині. Отже, правильна відповідь варіант  $C_1 D$ .

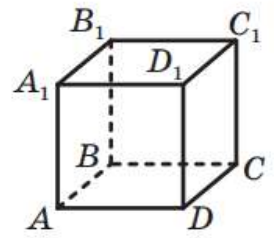
**Задача 8 (ЗНО 2014).** Відрізок  $AB$  перетинає площину  $\alpha$  в точці  $O$ . Проекції відрізків  $AO$  і  $BO$  на цю площину дорівнюють 5 см і 20 см відповідно. Знайдіть довжину відрізка  $AB$ , якщо  $AO = 8$  см.

А	Б	В	Г	Д
10 см	22 см	32 см	40 см	52 см



Отже, правильна відповідь варіант **В**.

**Задача 9 (ЗНО 2020 П).** На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Установіть відповідність між початком речення (1-3) та його закінченням (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження.



Початок речення

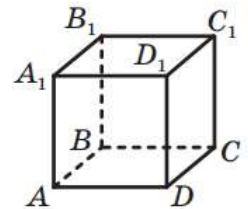
1. Точка  $C_1$  симетрична точці  $A_1$  відносно площини
2. Пряма  $AD$  паралельна площині
3. Пряма  $CC_1$  є прямою перетину площин ( $BB_1C_1$ ) та

Закінчення речення

- А. ( $AA_1B_1$ )
- Б. ( $DD_1C_1$ )
- В. ( $A_1B_1C_1$ )
- Г. ( $AA_1D_1$ )
- Д. ( $BB_1D_1$ )

**Відповідь:** 1) Для того, щоб точка  $C_1$  побачила себе «як у дзеркало» в точці  $A_1$ , необхідно, щоб це «дзеркало» було розташоване між ними, тобто це площина ( $BB_1D_1$ ), варіант Д. 2) Пряма  $AD$  паралельна, наприклад, прямим  $A_1D_1$  та  $B_1C_1$ , які належать площині ( $A_1B_1C_1$ ), отже вона паралельна даній площині, тому варіант В. 3) Пряма  $CC_1$  належить площині ( $BB_1C_1$ ) та ( $DD_1C_1$ ), а отже є прямою їх перетину, тому варіант Б.

**Задача 9 (ЗНО 2012).** На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Установіть відповідність між початком речення (1-3) та його закінченням (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження.



Початок речення

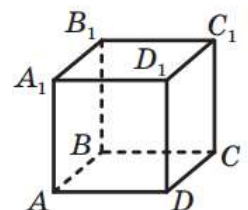
1. Пряма  $CD_1$
2. Пряма  $AC$
3. Пряма  $A_1V$

Закінчення речення

- А. паралельна площині  $AA_1B_1V$ .
- Б. перпендикулярна до площини  $AA_1B_1V$ .
- В. належить площині  $AA_1B_1V$ .
- Г. має з площиною  $AA_1B_1V$  лише дві спільні точки.
- Д. утворює з площиною  $AA_1B_1V$  кут  $45^\circ$ .

**Відповідь:** 1) Пряма  $CD_1$  паралельна прямій  $BA_1$ , яка належить площині  $AA_1B_1V$ , отже паралельна даній площині, варіант А. 2) Пряма  $AC$  є діагоналлю квадрата  $ABCD$  і утворює з прямою  $AB$  кут  $45^\circ$  за властивістю діагоналі та сторони квадрата, тому варіант Д. 3) Пряма  $A_1V$  лежить на площині  $AA_1B_1V$ , тому варіант В.

**Задача 10 (ЗНО 2019 Д).** На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Установіть відповідність між початком речення (1-3) та його закінченням (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження.



Початок речення

1. Пряма  $CB$
2. Пряма  $CD_1$
3. Пряма  $AC$

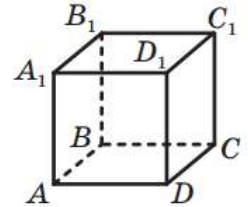
Закінчення речення

- А. паралельна площині  $AA_1B_1V$ .
- Б. перпендикулярна до площини  $AA_1B_1V$ .
- В. належить площині  $AA_1B_1V$ .
- Г. має з площиною  $AA_1B_1V$  лише дві спільні точки.
- Д. утворює з площиною  $AA_1B_1V$  кут  $45^\circ$ .



**Відповідь:** 1) Пряма  $CB$  перпендикулярна до прямих  $AB$  і  $BB_1$ , які належать площині  $AA_1B_1B$ , отже варіант **Б**. 2) Пряма  $CD_1$  паралельна прямій  $BA_1$ , яка належить площині  $AA_1B_1B$ , тому варіант **А**. 3) Пряма  $AC$  є діагоналлю квадрата  $ABCD$  і утворює з прямою  $AB$  кут  $45^\circ$  за властивістю діагоналі та сторони квадрата, тому варіант **Д**.

**Задача 11 (ЗНО 2019).** На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Установіть відповідність між парою прямих (1-3) та їхнім взаємним розташуванням (А-Д).



Пара прямих

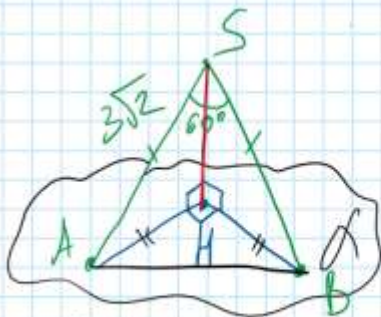
Взаємне розташування

1.  $AC$  і  $CC_1$
2.  $AB_1$  і  $CD_1$
3.  $AC$  і  $CD_1$

- А. прямі - паралельні
- Б. прямі - мимобіжні
- В. прямі перетинаються і утворюють прямий кут
- Г. прямі перетинаються і утворюють кут  $45^\circ$
- Д. прямі перетинаються і утворюють кут  $60^\circ$

**Відповідь:** 1) Прямі  $AC$  і  $CC_1$  є сторонами квадрата  $AA_1C_1C$ , а між сторонами квадрата кут  $90^\circ$ , отже варіант **В**. 2) Прямі  $AB_1$  і  $CD_1$  не перетинаються, але і не є паралельними, тому варіант **Б**. 3) Прямі  $AC$  і  $CD_1$  є діагоналями двох квадратів  $ABCD$  і  $DD_1C_1C$ , між якими кут  $90^\circ$ , а отже між їх діагоналями кут  $60^\circ$ , тому варіант **Д**.

**Задача 12.** Із точки до площини проведено дві похилі, які дорівнюють  $3\sqrt{2}$  см кожна. Кут між похилими дорівнює  $60^\circ$ , а між їхніми проєкціями – прямий. Знайдіть відстань від точки до площини.



$\triangle ABS$  - рівнобедрений ( $AS = BS = 3\sqrt{2}$  см)  
за умовою, тому  $AH = BH$ , бо рівні похилі мають рівні проєкції. З  $\triangle ASB$ :  
за теор. косинусів  $AB^2 = AS^2 + BS^2 - 2 \cdot AS \cdot BS \cdot \cos 60^\circ$   
 $AB^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos 60^\circ =$   
 $= 9 \cdot 2 + 9 \cdot 2 - 18 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 18 + 18 - 18 = 18$

$AB = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$  (см). З  $\triangle ABH$  ( $\angle H = 90^\circ$ ):

Нехай  $AH = BH = x$  см, тоді за теор. Піфагора

$$AH^2 + BH^2 = AB^2 \quad x^2 + x^2 = (3\sqrt{2})^2 \quad 2x^2 = 9 \cdot 2 \quad x^2 = 9 \quad x = 3 \text{ (см)}$$

Отже,  $AH = BH = 3$  (см), тоді з  $\triangle ASH$  ( $\angle H = 90^\circ$ ):

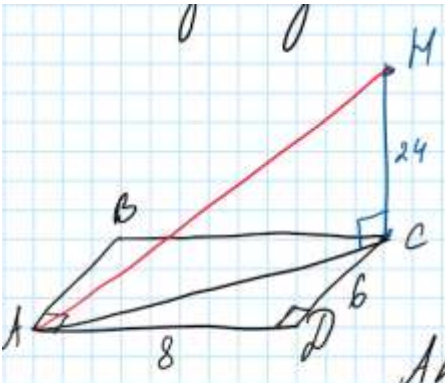
за теор. Піфагора  $SH^2 = AS^2 - AH^2$

$$SH^2 = (3\sqrt{2})^2 - 3^2 = 9 \cdot 2 - 9 = 9$$

$$SH = 3 \text{ (см)}$$

**Відповідь:**  $SH = 3$  см.

**Задача 13.** Із точки до площини прямокутника зі сторонами 6 см і 8 см проведено перпендикуляр довжиною 24 см. Основа перпендикуляра – вершиною одного із кутів прямокутника. Знайдіть відстань від даної точки до протилежної вершини прямокутника.



З  $\triangle ACD$  ( $\angle D = 90^\circ$ ): за теор. Піфагора  
 $AC^2 = AD^2 + CD^2$   
 $AC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$   
 $AC = \sqrt{100} = 10$  (см)

З  $\triangle ACH$  ( $\angle C = 90^\circ$ ): за теор. Піфагора  
 $AH^2 = CH^2 + AC^2$   
 $AH^2 = 24^2 + 10^2 = 576 + 100 = 676$   
 $AH = \sqrt{676} = 26$  (см).      Відповідь:  $AH = 26$  см.

**Домашнє завдання:** пройти тест за посиланням нижче та надіслати на пошту результат (скріншот з отриманими балами) та записати розв'язки завдань у зошиті:

[Математика - тести для підготовки до ЗНО – сайт ЗНО.Освіта.UA \(osvita.ua\)](https://osvita.ua)

**Зворотній зв'язок:**

**E-mail** [t.anastasia.igorivna@gmail.com](mailto:t.anastasia.igorivna@gmail.com)