**20.11.2023**

**Група 24**

**Математика (алгебра)**

**Урок 17-18**

**Тема:** Контрольна робота №1 «Показникова та логарифмічна функція». Первісна функції

**Мета:**

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

## Матеріали до уроку:

**Розподіл варіантів:** 1-8 в списку – 1 варіант, 9-16 в списку – 2 варіант, 17-24 в списку – 3 варіант, 25-30 в списку – 4 варіант.

### *Варіант 1*

**1.** *(2 бали)* Знайдіть область визначення функції $y = \lg(5x - 9)$.

**2.** *(6 балів)* Розв'яжіть рівняння:
1) $5^{x+1} - 3 \cdot 5^x = 250$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(3x + 4) = -2$;
3) $\log_7(2x + 9) = \log_7(x^2 + 5x - 1)$; 4) $(7^{x+3})^{x-4} = \left(\frac{1}{7}\right)^x \cdot 49^{x+6}$;
5) $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$.

**3.** *(4 бали)* Скільки цілих розв'язків у кожній з нерівностей:
1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{4x} \le \left(\frac{3}{7}\right)^{2x-3}$; 2) $\frac{1}{27} < 3^{2-x} \le 3$; 3) $\log_{0,9}(x - 4) \ge \log_{0,9}(8 - x)$.

### *Варіант 2*

**1.** *(2 бали)* Знайдіть область визначення функції $y = \lg(7 - 7x)$.

**2.** *(6 балів)* Розв'яжіть рівняння:
1) $2^x + 2^{x-3} = 72$; 2) $\log_{0,1}(10x - 7) = -1$;
3) $\log_8(3x + 4) = \log_8(x^2 - 4x - 14)$; 4) $(5^{x+4})^{x-3} = 0{,}2^x \cdot 25^{x-4}$;
5) $\log_5 x + \log_5(x - 4) = 1$.

**3.** *(4 бали)* Скільки цілих розв'язків у кожній з нерівностей:
1) $\left(\frac{5}{11}\right)^{3x} \geq \left(\frac{5}{11}\right)^{2-x}$; 2) $\frac{1}{16} \leq 2^{3-x} < 2$; 3) $\log_{\frac{2}{3}}(6 - x) \leq \log_{\frac{2}{3}}(x + 1)$.

### *Варіант 3*

**1.** *(2 бали)* Знайдіть область визначення функції $y = \log_5(1 - x)$.

**2.** *(6 балів)* Розв'яжіть рівняння:
1) $4^{x+2} - 4^{x+1} + 4^x = 26$; 2) $\log_2(x - 3) = 3$;
3) $\log_3 \log_4 x = 1$; 4) $3^x - 4 \cdot 3^{x-1} = 1$;
5) $\log_2(x - 3) + \log_2(x + 4) = 3$.

**3.** *(4 бали)* Скільки цілих розв'язків у кожній з нерівностей:
1) $7^{2x} \geq \frac{1}{7^3}$; 2) $3 < 3^x < 27$; 3) $\log_{0,6}(5x - 8) \leq \log_{0,6}(-3x)$.

### *Варіант 4*

**1.** *(2 бали)* Знайдіть область визначення функції $y = \log_9(x + 6)$.

**2.** *(6 балів)* Розв'яжіть рівняння:
1) $3^x + 3^{x+2} = 270$; 2) $\log_9(x + 3) = 2$;
3) $\log_9 \log_{25} x = 0$; 4) $2^{x+2} - 5 \cdot 2^x = 8$;
5) $\log_4(x - 3) + \log_4(x + 3) = 2$.

**3.** *(4 бали)* Скільки цілих розв'язків у кожній з нерівностей:
1) $11^{4x} \geq \frac{1}{11^{10}}$; 2) $5 < 5^x < 625$; 3) $\log_{0,8}(5x - 7) \geq \log_{0,8}(-2x)$.

Ви знаєте, що знаходження похідної заданої функції називають диференціюванням. Обернену операцію, тобто знаходження функції за її похідною, називають **інтегруванням.**

**Означення. Функцію $F$ називають первісною функцією (або коротко первісною) функції $f$ на проміжку $I$, якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність**

$$F'(x) = f(x).$$

Наприклад, функція $F(x) = x^2$ є первісною функції $f(x) = 2x$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$, оскільки на $\mathbb{R}$ виконується рівність $(x^2)' = 2x$.

Часто в задачах, пов'язаних з первісною функції, проміжок $I$ опускають. У таких випадках вважають, що $I = (-\infty; +\infty)$. Так, функція $F(x) = \cos x$ є первісною функції $f(x) = -\sin x$, оскільки виконується рівність $(\cos x)' = -\sin x$.

Наведемо ще один приклад. Функція $F(x) = \sqrt{x}$ є первісною функції $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на проміжку $(0; +\infty)$, оскільки на цьому проміжку виконується рівність $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Розглянемо функції $y = x^2 + 1$ і $y = x^2 - 2$. Кожна з них має одну й ту саму похідну $y = 2x$. Таким чином, обидві функції $y = x^2 + 1$ і $y = x^2 - 2$ є первісними функції $y = 2x$. Зрозуміло, що кожна з функцій виду $y = x^2 + C$, де $C$ — довільне число, є первісною функції $y = 2x$. Отже, задача знаходження первісної має безліч розв'язків.

Мета інтегрування полягає в тому, щоб для заданої функції знайти всі її первісні на заданому проміжку.

Як пов'язані між собою всі первісні даної функції, указує така теорема.

**Теорема 9.1 (основна властивість первісної).** ***Якщо функція $F$ є первісною функції $f$ на проміжку $I$ та $C$ — довільне число, то функція***

$$y = F(x) + C$$

***також є первісною функції $f$ на проміжку $I$.***

***Будь-яку первісну функції $f$ на проміжку $I$ можна подати у вигляді $y = F(x) + C$, де $C$ — деяке число.***

Якщо функція $F$ є первісною функції $f$ на проміжку $I$, то запис $F(x) + C$, де $C$ — довільне число, називають **загальним виглядом первісних** функції $f$ на проміжку $I$.

З основної властивості первісної випливає, що графіки будь-яких двох первісних даної функції можна отримати один з одного паралельним перенесенням уздовж осі ординат (рис. 9.1).

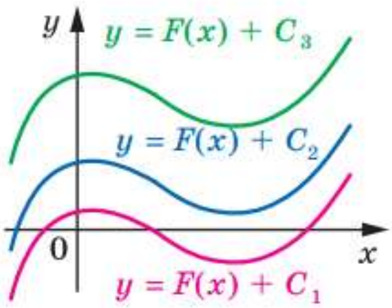


**Рис. 9.1**

Сукупність усіх первісних функції $y = f(x)$ на проміжку $I$ називають її **невизначеним інтегралом** і позначають

$$\int f(x)dx$$

(читають: «інтеграл еф від ікс де ікс»).

Під час розв'язування задач на первісну зручно користуватися таблицею, наведеною на форзаці 3.

**Первісна функції та визначений інтеграл**

| Функція $f(x)$ | Загальний вигляд первісних $F(x) + C$, $C$ – довільна стала |
|---|---|
| $0$ | $C$ |
| $1$ | $x + C$ |
| $x^{\alpha}$, $\alpha \neq -1$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln\|x\| + C$ |
| $e^x$ | $e^x + C$ |
| $\sin x$ | $-\cos x + C$ |
| $\cos x$ | $\sin x + C$ |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\mathrm{tg}\, x + C$ |

## ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

**Приклад 1.** Перевірте, чи є функція $F(x)=2\sqrt{x}$ первісною для функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ на проміжку $(0;+\infty)$.

**Розв'язання**

▶ $F'(x)=\left(2\sqrt{x}\right)'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, це й означає, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. ■

**Коментар**

За означенням функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, якщо $F'(x)=f(x)$.

**Приклад 2.** Знайдіть:

1) одну з первісних для функції $f(x)=x^4$ на $\boldsymbol{R}$;

2) усі первісні для функції $f(x)=x^4$;

3*) $\int x^4dx$.

**Розв'язання**

1) ▶ Однією з первісних для функції $f(x)=x^4$ на множині $\boldsymbol{R}$ є функція $F(x)=\frac{x^5}{5}$, оскільки

$$F'(x)=\left(\frac{x^5}{5}\right)'=\frac{1}{5}\cdot 5x^4=x^4.$$

■

2) ▶ За основною властивістю первісних усі первісні для функції $f(x)=x^4$ можна записати у вигляді $\frac{x^5}{5}+C$, де $C$ — довільна стала. ■

3*) ▶ $\int x^4dx=\frac{x^5}{5}+C$, де $C$ — довільна стала. ■

**Коментар**

1) Первісну для функції $f(x)=x^4$ спробуємо знайти підбором. В процесі можна міркувати так: щоб після знаходження похідної одержати $x^4$, потрібно брати похідну від $x^5$. Але $\left(x^5\right)'=5x^4$, щоб похідна дорівнювала $x^4$, достатньо поставити перед функцією $x^5$ коефіцієнт $\frac{1}{5}$.

Простіше використати формулу з п. 5 табл. 10 (таблиці первісних): *однією з первісних для функції $x^\alpha$ є функція*

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

2) *Якщо ми знаємо одну первісну $F(x)$ для функції $f(x)$, то* за основною властивістю первісних *будь-яку первісну для функції $f(x)$ можна записати у вигляді $F(x)+C$*, де $C$ — довільна стала.

3) За означенням $\int f(x)dx=F(x)+C$,

тобто невизначений інтеграл $\int f(x)dx$ — це спеціальне позначення загального виду всіх первісних для даної функції $f(x)$ (який ми вже знайшли в п. 2 розв'язання).

**Приклад 3.** Для функції $f(x)=\sqrt{x}$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M(9;10)$.

**Розв'язання**

$D(f)=[0;+\infty)$. Тоді $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.

Загальний вигляд усіх первісних для функції $f(x)$ такий:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$$

За умовою графік первісної проходить через точку $M(9;10)$, отже, при $x=9$ одержуємо

$$\frac{2}{3}\cdot 9\sqrt{9}+C=10.$$

Звідси $C=-8$. Тоді шукана первісна:

$$\frac{2}{3}x\sqrt{x}-8.$$

**Коментар**

Спочатку запишемо загальний вигляд первісних для заданої функції: $F(x)+C$. Потім використаємо те, що графік одержаної функції проходить через точку $M(9;10)$, отже, при $x=9$ значення функції $F(x)+C$ дорівнює 10.

Щоб знайти первісну для функції $f(x)=\sqrt{x}$, урахуємо, що її область визначення $x\geqslant 0$. Тоді цю функцію можна записати так: $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ і використати формулу знаходження первісної для функції $x^{\alpha}$, а саме: $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$.

**Домашнє завдання:** розв'язати задачі (в зошиті):

1) **2** Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на $(-\infty; +\infty)$ **(8.5–8.6):**

**8.5.** 1) $F(x) = x^4 - 3x + 1$, $f(x) = 4x^3 - 3$;
2) $F(x) = x\cos x$, $f(x) = \cos x - x\sin x$.

2) Знайдіть загальний вигляд первісних для функції **(9.7–9.10):**

**9.7.** 1) $f(x) = 10x^9$; 2) $f(x) = \frac{5}{\cos^2 x}$;
3) $f(x) = 14x^6$; 4) $f(x) = 6x^{-3}$.

**Зворотній зв'язок:**
**E-mail** t.anastasia.igorivna@gmail.com