

20.10.

Група Б-1

Вища математика

Урок 51-52

Тема: дослідження функції та побудова графіка за допомогою похідної

Мета:

- Сформулювати вміння застосовувати похідну для дослідження функції та побудови графіків. Навчити студентів розв'язувати задачі, що передбачають використання основних понять по даній темі
- Розвивати аналітичне мислення, увагу, критично ставитись до отриманих результатів.
- Виховувати пізнавальний інтерес до математики, згуртованість, повагу до товаришів та їхньої думки, наполегливість у досягненні поставленої мети.

Матеріали до уроку:

Приклад. $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x + 4}$

$$x \neq -4$$

$$D(f) = (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$$

Функція ні парна, ні непарна і не періодична

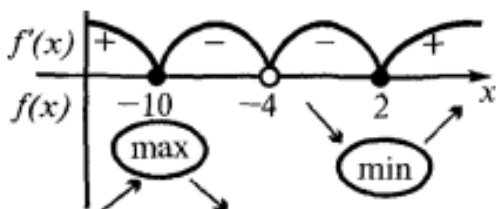
$$Oy \quad x = 0; y = 0$$

$$Ox \quad y = 0; \frac{x^2 - 5x}{x + 4} = 0;$$

$$x^2 - 5x = 0; x = 0 \text{ або } x = 5$$

$$f'(x) = \frac{(2x - 5)(x + 4) - (x^2 - 5x)}{(x + 4)^2} = \frac{x^2 + 8x - 20}{(x + 4)^2}$$

$$f'(x) = 0; x^2 + 8x - 20 = 0; x_1 = -10 \text{ або } x_2 = 2$$



$$f(-10) = -25; f(2) = -1$$

Знайти точки перегіну (якщо вони існують) і значення $f(x)$ в точках перегіну

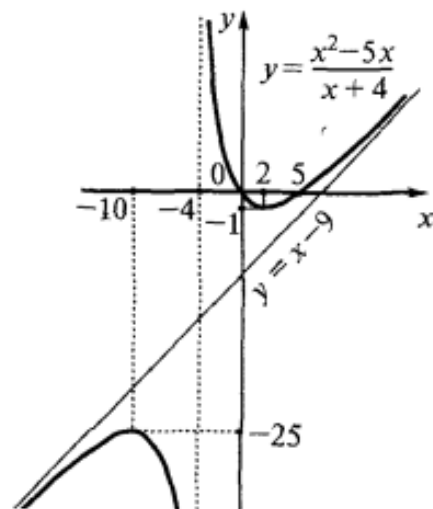
$$f''(x) = (f'(x))' =$$

$$= \frac{(2x + 8)(x + 4)^2 - 2(x + 4)(x^2 + 8x - 20)}{(x + 4)^4} = \frac{72}{(x + 4)^3}$$

Оскільки $f''(x) \neq 0$, то знак другої похідної може змінюватися лише в точці $x = -4$



x	-6	-2
y	-33	7



Приклад 1. Дослідити функцію і побудувати її графік

(Дубовик В.П., Юрик І.І. "Вища математика. Збірник задач")

I (5.889) $y = \frac{x^2}{2(x-1)}$.

Розв'язання: 1) Функція визначена всюди, крім точки в якій знаменник перетворюється в нуль $x=1$. Область визначення складається з двох інтервалів $D(y): (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) При підстановці $x=0$ знайдемо значення функції

$$y(0) = \frac{0}{2(0-1)} = 0.$$

Таку ж саму точку отримаємо, якщо прирівняємо функцію до нуля. Точка $x=0$ - єдина точка перетину з осями координат.

3) Перевірка на парність

$$y(-x) = \frac{(-x)^2}{2(-x-1)} = -\frac{x^2}{2(x+1)};$$

$$y(-x) \neq y(x), \quad y(-x) \neq -y(x).$$

Отже **функція ні парна, ні непарна, неперіодична.**

4) В даному випадку маємо одну точку розриву $x=1$. Обчислимо границі зліва і справа

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{2(x-1)} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{2(x-1)} = +\infty.$$

Отже $x=1$ – **точка розриву другого роду.**

5) Для відшукування інтервалів монотонності обчислюємо похідну функції

$$y' = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2}{2(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}.$$

Прирівнюючи її до нуля матимемо точки підозрілі на екстремум $x=0$; $x=2$. Вони розбивають область визначення на інтервали монотонності

$$(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty).$$

Дослідимо поведінку похідної справа та зліва від знайдених точок

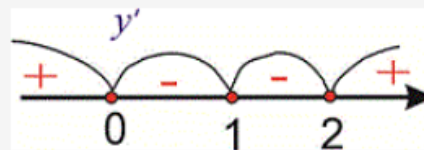
$$y'(-1) = \frac{-1(-1-2)}{2(-1-1)^2} = \frac{1}{4} > 0;$$

$$y'(0,5) = \frac{0,5(0,5-2)}{2(0,5-1)^2} = -1,5 < 0;$$

$$y'(1,5) = \frac{1,5(1,5-2)}{2(1,5-1)^2} = -1,5 < 0;$$

$$y'(3) = \frac{3(3-2)}{2(3-1)^2} = \frac{3}{8} > 0.$$

Графічно інтервали монотонності матимуть вигляд



Досліджувана функція зростає на інтервалах $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$ та спадає $(0; 1)$, $(1; 2)$.

Точка $x=0$ – точка локального максимуму, $x=2$ – локального мінімуму. Знайдемо значення функції

$$y_{\max} = 0, \quad y_{\min} = \frac{2^2}{2(2-1)} = 2.$$

б) Для відшукування інтервалів опуклості знайдемо другу похідну

$$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2x(x-2)(x-1)}{2(x-1)^4} = \frac{1}{(x-1)^3}.$$

Друга похідна не перетворюється в нуль, а це значить, що функція немає точок перегину.

Проте, це не означає, що функція не є опуклою та вгнутою, детальні пояснення містяться в публікації

[Як визначати інтервали опуклості та вгнутості функції?](#)

Зліва від одиниці на інтервалі $(-\infty; 1)$ друга похідна менша нуля (перевіряється підстановкою), звідси робимо висновок, що функція опукла.

Після одиниці друга похідна додатна, отже на інтервалі $(1; +\infty)$ функція вгнута.

Як це виглядає на графіку Ви можете побачити з наведеного далі рисунку.

7) Точка $x=1$ – **вертикальна асимптота функції**. Рівняння похилої асимптоти має вигляд **$y=kx+b$**

де k, b - границі, що знаходять за правилом

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x};$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$

Знаходимо границі

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{2x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{2x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{2};$$

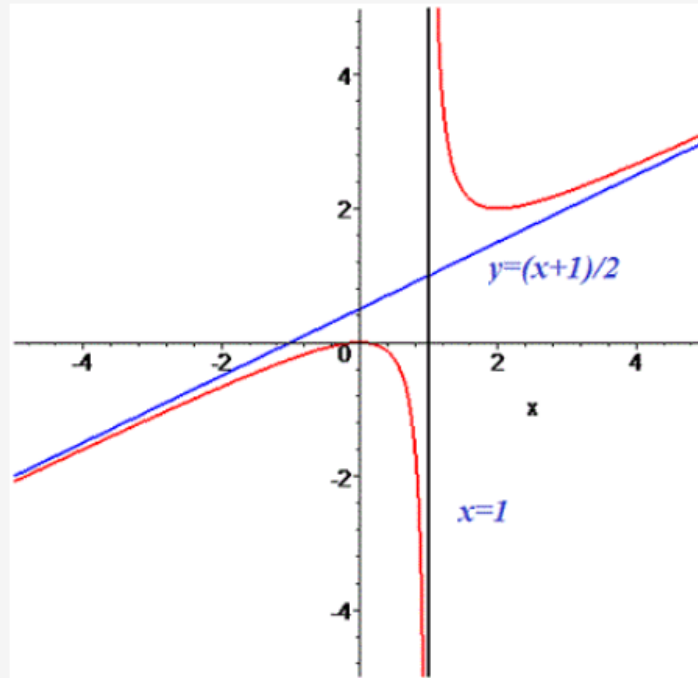
$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{2(x-1)} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{2(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{2(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

Кінцевий вигляд прямої

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

8) На основі проведеного аналізу виконуємо побудову графіка функції.



Домашнє завдання:

Дослідити функцію та побудувати графік

$$y = x^3 + 3x^2 + 2x + 4$$

Зворотній зв'язок:

E-mail vitasergiivna1992@gmail.com