

20.10.2023

Група 35

Математика (алгебра)

Урок 11-12

Тема: Підсумки розділу II «Інтеграл та його застосування». Підготовка до контрольної роботи №1 «Інтеграл та його застосування»

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати знання з фізики під час розв'язування прикладних задач; формувати уяву про процеси у природі;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення фізики та астрономії; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення фізики та астрономії, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Первісна

Функцію F називають первісною функцією (або коротко первісною) функції f на проміжку I , якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Основна властивість первісної

Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та C — довільне число, то функція $y = F(x) + C$ також є первісною функції f на проміжку I .

Будь-яку первісну функції f на проміжку I можна подати у вигляді $y = F(x) + C$, де C — деяке число.

Невизначений інтеграл

Сукупність усіх первісних функцій $y = f(x)$ на проміжку I називають її невизначеним інтегралом і позначають $\int f(x)dx$.

Правила знаходження первісної

Якщо функції F і G є відповідно первісними функцій f і g на проміжку I , то на цьому проміжку функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$.

Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та k — деяке число, то на цьому проміжку функція $y = kF(x)$ є первісною функції $y = kf(x)$.

Площа криволінійної трапеції

Площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ ($a < b$), можна обчислити за формулою $S = F(b) - F(a)$, де F — будь-яка первісна функції f на проміжку $[a; b]$.

Визначений інтеграл

Нехай F — первісна функції f на проміжку I , числа a і b , де $a < b$, належать проміжку I . Різницю $F(b) - F(a)$ називають визначеним інтегралом функції f на проміжку $[a; b]$ і позначають

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Формула Ньютона—Лейбніца

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, де F — довільна первісна функції f на проміжку $[a; b]$.

Підготовка до контрольної роботи №1 «Інтеграл та його застосування»

Приклад 1. Перевірте, чи є функція $F(x) = 2\sqrt{x}$ первісною для функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

Розв'язання

► $F'(x) = (2\sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, це й означає, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. ■

Коментар

За означенням функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$.

Приклад 2. Знайдіть:

- 1) одну з первісних для функції $f(x) = x^4$ на \mathbf{R} ;
- 2) усі первісні для функції $f(x) = x^4$;
- 3*) $\int x^4 dx$.

Розв'язання

- 1) ► Однією з первісних для функції $f(x) = x^4$ на множині \mathbf{R} є функція $F(x) = \frac{x^5}{5}$, оскільки $F'(x) = \left(\frac{x^5}{5}\right)' = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 = x^4$. ■
- 2) ► За основною властивістю первісних усі первісні для функції $f(x) = x^4$ можна записати у вигляді

Коментар

- 1) Первісну для функції $f(x) = x^4$ спробуємо знайти підбором. В процесі можна міркувати так: щоб після знаходження похідної одержати x^4 , потрібно брати похідну від x^5 . Але $(x^5)' = 5x^4$, щоб похідна дорівнювала x^4 , достатньо поставити перед функцією x^5 коефіцієнт $\frac{1}{5}$.

Простіше використати формулу з п. 5 табл. 10 (таблиці первісних): однією з первісних для функції x^α є функція

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

$\frac{x^5}{5} + C$, де C — довільна стала. ■

3*) ▶ $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$,

де C — довільна стала. ■

2) Якщо ми знаємо одну первісну $F(x)$ для функції $f(x)$, то за основною властивістю первісних будь-яку первісну для функції $f(x)$ можна записати у вигляді $F(x) + C$, де C — довільна стала.

3) За означенням $\int f(x) dx = F(x) + C$,

тобто невизначений інтеграл $\int f(x) dx$ — це спеціальне позначення загального виду всіх первісних для даної функції $f(x)$ (який ми вже знайшли в п. 2 розв'язання).

Приклад 3. Для функції $f(x) = \sqrt{x}$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M(9; 10)$.

Розв'язання

▶ $D(f) = [0; +\infty)$. Тоді $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$.

Загальний вигляд усіх первісних для функції $f(x)$ такий:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C.$$

За умовою графік первісної проходить через точку $M(9; 10)$, отже, при $x = 9$ одержуємо

$$\frac{2}{3} \cdot 9\sqrt{9} + C = 10.$$

Звідси $C = -8$. Тоді шукана первісна:

$$\frac{2}{3} x\sqrt{x} - 8. \quad \blacksquare$$

Коментар

Спочатку запишемо загальний вигляд первісних для заданої функції: $F(x) + C$. Потім використаємо те, що графік одержаної функції проходить через точку $M(9; 10)$, отже, при $x = 9$ значення функції $F(x) + C$ дорівнює 10.

Щоб знайти первісну для функції $f(x) = \sqrt{x}$, урахуємо, що її область визначення $x \geq 0$. Тоді цю функцію можна записати так:

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ і використати формулу знаходження первісної для функції x^α , а саме: $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

Приклад 1. Обчисліть $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} \text{▶ } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} &= \operatorname{tg} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 = \\ &= 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Відповідь: 1. ■

Коментар

Оскільки для функції $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ми знаємо первісну: $F(x) = \operatorname{tg} x$ (див. табл. 10), то заданий інтеграл можна обчислити безпосереднім застосуванням формули Ньютона — Лейбніца

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Приклад 2. Обчисліть $\int_1^3 \left(\frac{4}{x} - x \right) dx$.

Розв'язання

I спосіб

► Для функції $f(x) = \frac{4}{x} - x$ однією з первісних є функція

$$F(x) = 4 \ln|x| - \frac{x^2}{2}. \text{ Тоді}$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 \left(\frac{4}{x} - x \right) dx &= \left(4 \ln|x| - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^3 = \\ &= \left(4 \ln|3| - \frac{3^2}{2} \right) - \left(4 \ln|1| - \frac{1^2}{2} \right) = \\ &= 4 \ln 3 - 4. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

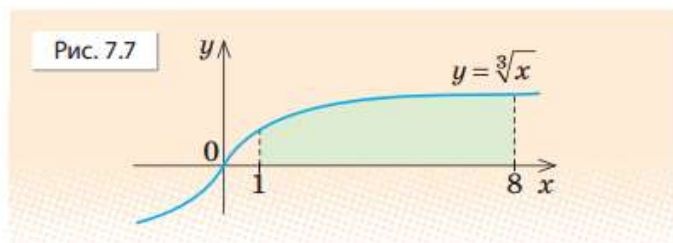
II спосіб

$$\begin{aligned} \int_1^3 \left(\frac{4}{x} - x \right) dx &= \int_1^3 \frac{4dx}{x} - \int_1^3 x dx = \\ &= 4 \int_1^3 \frac{dx}{x} - \int_1^3 x dx = 4 \ln|x| \Big|_1^3 - \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 = \\ &= 4(\ln|3| - \ln|1|) - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = \\ &= 4 \ln 3 - 4. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 3. Обчисліть площу фігури, обмеженої прямими $x = 1$, $x = 8$, віссю Ox і графіком функції $y = \sqrt[3]{x}$.

Розв'язання

► Зображуючи зазначені лінії, бачимо, що задана фігура — криволінійна трапеція (рис. 7.7).



Тоді її площа

$$\begin{aligned} S &= \int_1^8 \sqrt[3]{x} dx = \int_1^8 x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} \Big|_1^8 = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_1^8 = \\ &= \frac{3}{4} \left(8^{\frac{4}{3}} - 1^{\frac{4}{3}} \right) = \frac{3}{4} \left(\sqrt[3]{8^4} - 1 \right) = \frac{45}{4} = 11 \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Відповідь: $11 \frac{1}{4}$. \blacksquare

Коментар

Можливі два шляхи обчислення заданого інтеграла.

1) Спочатку знайти первісну для функції

$$f(x) = \frac{4}{x} - x, \text{ використовуючи правила}$$

обчислення первісних і таблицю первісних, а потім знайти інтеграл за формулою Ньютона — Лейбніца.

2) Використати формулу

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

і записати заданий інтеграл як алгебраїчну суму двох інтегралів, кожний із яких можна безпосередньо обчислити, як у прикладі 1 (для першого доданка можна також використати формулу

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \text{ і винести ста-$$

лий множник 4 за знак інтеграла).

Коментар

Задана фігура є криволінійною трапецією, і тому її площу можна обчислити за формулою

$$S = \int_a^b f(x) dx,$$

де $a = 1$, $b = 8$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Також потрібно врахувати, що на заданому відрізку $[1; 8]$ значення $x > 0$, і за цієї умови можна записати

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}.$$

Домашнє завдання: розв'язати варіант 0 контрольної роботи в зошиті:

Тест № 2

- Для функції $f(x) = 4x^3$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $A(0;1)$.
А $F(x) = -x^4 - 1$ В $F(x) = x^4$ Д $F(x) = x^4 + 1$
Б $F(x) = x^4 - 1$ Г $F(x) = -x^4 + 1$
- Серед наведених нижче функцій вкажіть ту, первісною для якої є функція $F(x) = \text{ctg } x + C$.
А $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ В $f(x) = \text{tg } x$ Д $f(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Б $f(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$ Г $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$
- Знайдіть загальний вигляд первісних для функції $f(x) = \cos x - e^x$.
А $F(x) = -\sin x - e^x$ В $F(x) = \sin x - e^x + C$ Д $F(x) = \sin x + e^x + C$
Б $F(x) = \sin x - e^x$ Г $F(x) = -\sin x - e^x + C$
- Установіть відповідність між інтегралами (1-3) та їхніми значеннями (А-Г).

1 $\int_0^1 \sqrt{x} dx$	А 1
2 $\int_0^1 x^2 dx$	Б $\frac{7}{24}$
3 $\int_1^2 \frac{1}{x^4} dx$	В $\frac{1}{3}$
	Г $\frac{2}{3}$
- Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = \frac{1}{x^2}$, прямими $x=1$, $x=4$ та віссю Ox .

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com