**20.10.2023**

**Група 23**

**Математика (геометрія)**

**Урок 5-6**

**Тема:** Дії над векторами

**Мета:**

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

**Матеріали до уроку:**

Нехай у просторі дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Відкладемо від довільної точки $A$ простору вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}$. Далі від точки $B$ відкладемо вектор $\overrightarrow{BC}$, рівний вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ називають **сумою векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 40.1) і записують: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Описаний алгоритм додавання двох векторів називають **правилом трикутника**.

Можна показати, що сума $\vec{a} + \vec{b}$ не залежить від вибору точки $A$.

Зазначимо, що *для будь-яких трьох точок $A$, $B$ і $C$ виконується рівність* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Вона виражає правило трикутника.

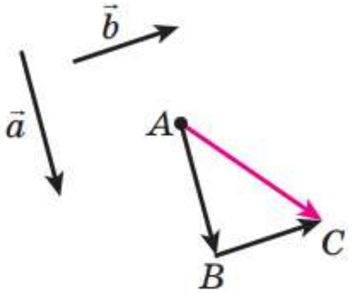


Рис. 40.1

Властивості додавання векторів аналогічні властивостям додавання чисел.

***Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ виконуються рівності:***

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ***(переставна властивість);***

$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ ***(сполучна властивість).***

Суму трьох і більшої кількості векторів знаходять так: спочатку додають перший і другий вектори, потім до отриманої суми додають третій вектор і т. д. Наприклад, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$.

Для тетраедра $DABC$, зображеного на рисунку 40.2, можна записати: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$.

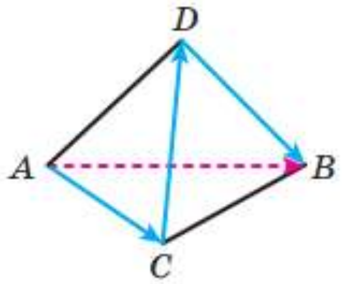



Рис. 40.2

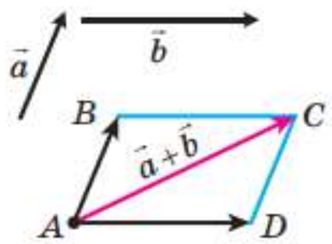



Рис. 40.3

Для додавання двох неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зручно користуватися **правилом паралелограма.**

Відкладемо від довільної точки $A$ вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}$, і вектор $\overrightarrow{AD}$, рівний вектору $\vec{b}$ (рис. 40.3). Побудуємо паралелограм $ABCD$. Тоді шукана сума $\vec{a} + \vec{b}$ дорівнює вектору $\overrightarrow{AC}$.

Розглянемо вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$, які не лежать в одній площині (рис. 40.4). Знайдемо суму цих векторів.

Побудуємо паралелепіпед так, щоб відрізки $OA$, $OB$ і $OC$ були його ребрами (рис. 40.5). Відрізок $OD$ є діагоналлю цього паралелепіпеда. Доведемо, що $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$.

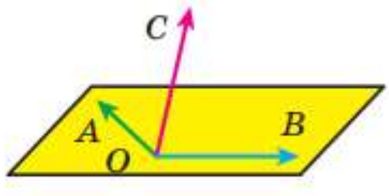



Рис. 40.4

Оскільки чотирикутник $OBKA$ — паралелограм, то $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK}$. Маємо: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OC}$. Оскільки чотирикутник $OCDK$ — паралелограм, то $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$.

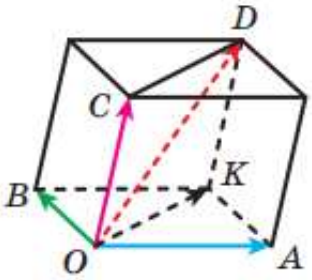



Рис. 40.5

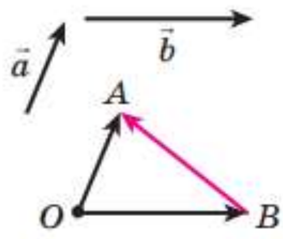



Рис. 40.6

Описаний спосіб додавання трьох векторів, які відкладені від однієї точки та не лежать в одній площині, називають **правилом паралелепіпеда.**

**Означення. Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, сума якого з вектором $\vec{b}$ дорівнює вектору $\vec{a}$.**

Записують: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Покажемо, як побудувати вектор, що дорівнює різниці векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Від довільної точки $O$ відкладемо вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, відповідно рівні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 40.6). Тоді $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$. За означенням різниці двох векторів $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, тобто $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$, отже, вектор $\overrightarrow{BA}$ дорівнює різниці векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Зазначимо, що *для будь-яких трьох точок O, A і B виконується рівність* $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$. Вона виражає правило знаходження різниці двох векторів, відкладених від однієї точки.

**Теорема 40.1.** ***Якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнюють відповідно $(a_1; a_2; a_3)$ і $(b_1; b_2; b_3)$, то координати вектора $\vec{a} + \vec{b}$ дорівнюють $(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$, а координати вектора $\vec{a} - \vec{b}$ дорівнюють $(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$.***

**Означення. Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ і числа $k$, відмінного від нуля, називають такий вектор $\vec{b}$, що:**

**1) $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$;**

**2) якщо $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; якщо $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.**

Записують: $\vec{b} = k\vec{a}$.

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $k = 0$, то вважають, що $k\vec{a} = \vec{0}$.

На рисунку 41.1 зображено паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Маємо: $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{O_1C_1}$, $\overrightarrow{B_1O_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{A_1C_1} = -2\overrightarrow{OA}$.

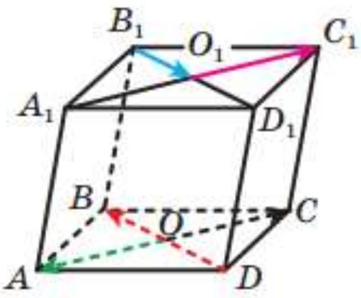



Рис. 41.1

З означення випливає, що

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

**Теорема 41.1.** ***Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується рівність $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$.***

Ця теорема дає змогу звести віднімання векторів до додавання: щоб від вектора $\vec{a}$ відняти вектор $\vec{b}$, можна до вектора $\vec{a}$ додати вектор $(-1) \cdot \vec{b}$.

Добуток $-1 \cdot \vec{a}$ позначають $-\vec{a}$ і називають вектором, **протилежним** вектору $\vec{a}$. Наприклад, записують:

$$\vec{a} + (-1) \cdot \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

З означення множення вектора на число випливає, що *коли $\vec{b} = k\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.*

Отже, *з рівності $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$ отримуємо, що точки O, A і B лежать на одній прямій.*

**Теорема 41.2.** ***Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні й $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число $k$, що $\vec{b} = k\vec{a}$.***

**Теорема 41.3.** ***Якщо координати вектора $\vec{a}$ дорівнюють $(a_1; a_2; a_3)$, то координати вектора $k\vec{a}$ дорівнюють $(ka_1; ka_2; ka_3)$.***

Множення вектора на число має такі властивості.

***Для будь-яких чисел $k$, $m$ і для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ виконуються рівності:***

***$(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ (сполучна властивість);***

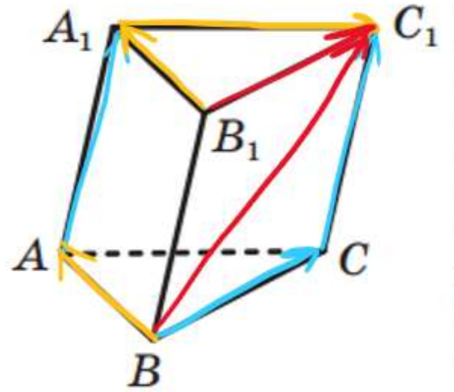
***$(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ (перша розподільна властивість);***

***$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (друга розподільна властивість).***

Ці властивості дають змогу перетворювати вирази, які містять суму векторів, їхню різницю та добуток вектора на число, аналогічно тому, як ми перетворюємо алгебраїчні вирази. Наприклад, $2(\vec{a} - 3\vec{b}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} - 6\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$.

**40.1.**° Дано призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 40.7). Знайдіть суму векторів:

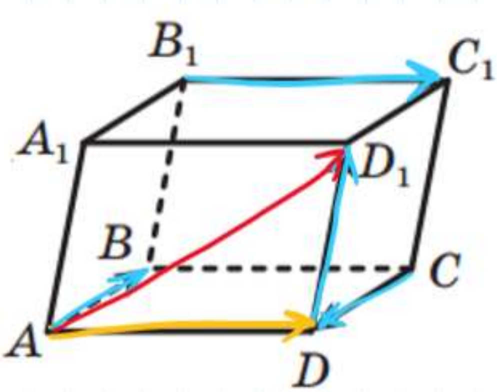
1) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA_1}$;  2) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A_1C_1}$.




1) $\vec{BC} + \vec{AA_1} = \vec{BC} + \vec{CC_1} = \vec{BC_1}$;

2) $\vec{BA} + \vec{A_1C_1} = \vec{B_1A_1} + \vec{A_1C_1} = \vec{B_1C_1}$.

**40.3.**° Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 40.8). Знайдіть суму $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{B_1C_1}$.




$\vec{AB} + \vec{DD_1} + \vec{CD} + \vec{B_1C_1} =$

$= \underbrace{\vec{AB} + \vec{CD}}_{\vec{0}} + \vec{DD_1} + \vec{B_1C_1} =$

$= \vec{0} + \vec{DD_1} + \vec{AD} = \vec{AD_1}$.

**40.5.**° Дано вектори $\vec{a}\,(3; -6; 4)$ і $\vec{b}\,(-2; 4; -5)$. Знайдіть:

1) координати вектора $\vec{a} + \vec{b}$;  2) $|\vec{a} + \vec{b}|$.

$\vec{a}\,(3; -6; 4)$, $\vec{b}\,(-2; 4; -5)$.

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$;

$\vec{c}\,(3 + (-2); -6 + 4; 4 + (-5)) = \vec{c}\,(3 - 2; -6 + 4; 4 - 5) =$

$= \vec{c}\,(1; -2; -1)$.

2) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}|$

$|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$.

Відповідь: $\vec{c}\,(1; -2; -1)$; $|\vec{c}| = \sqrt{6}$.

**40.7.°** Дано вектори $\overline{a}$ $(-10; 15; -20)$ і $\overline{b}$ $(2; 6; -12)$. Знайдіть:

1) координати вектора $\overline{a}-\overline{b}$; 2) $|\overline{a}-\overline{b}|$.

$\vec{a}(-10; 15; -20)$, $\vec{b}(2; 6; -12)$.

1) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}$

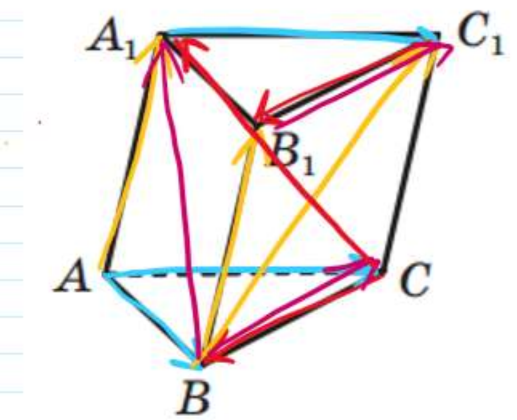
$\vec{d}(-10-2; 15-6; -20-(-12)) = \vec{d}(-12; 9; -8)$.

2) $|\vec{a}-\vec{b}| = |\vec{d}|$.

$|\vec{d}| = \sqrt{(-12)^2+9^2+(-8)^2} = \sqrt{144+81+64} = \sqrt{289} = 17$.

**40.9.°** Дано призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 40.7). Знайдіть різницю векторів:

1) $\overline{AB}-\overline{A_1C_1}$; 2) $\overline{AA_1}-\overline{BC_1}$; 3) $\overline{BA_1}-\overline{B_1C_1}$.

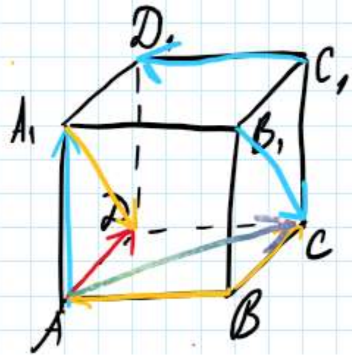



1) $\vec{AB} - \vec{A_1C_1} = \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$;

2) $\vec{AA_1} - \vec{BC_1} = \vec{BB_1} - \vec{BC_1} = \vec{C_1B_1}$;

3) $\vec{BA_1} - \vec{B_1C_1} = \vec{BA_1} - \vec{BC} = \vec{CA_1}$.

**40.13.**** Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть вектор, що дорівнює $\overline{AA_1}+\overline{B_1C}-\overline{C_1D_1}$.




$\vec{AA_1} + \vec{B_1C} - \vec{C_1D_1} = \vec{AA_1} + \vec{A_1D} - \vec{C_1D_1} =$

$= \vec{AD} - \vec{C_1D_1} = \vec{BC} - \vec{BA} = \vec{AC}$.

**41.4.°** Дано вектори $\overline{a}$ $(-3; 2; 5)$ і $\overline{b}$ $(-2; -4; 1)$. Знайдіть координати вектора $\overline{c}$, якщо:

1) $\overline{c}=3\overline{a}+2\overline{b}$; 2) $\overline{c}=4\overline{a}-3\overline{b}$.

$\vec{a}(-3; 2; 5)$, $\vec{b}(-2; -4; 1)$.

1) $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$;

$\vec{c}\,(3\cdot(-3) + 2\cdot(-2);\ 3\cdot 2 + 2\cdot(-4);\ 3\cdot 5 + 2\cdot 1) =$

$= \vec{c}\,(-9 + (-4);\ 6 + (-8);\ 15 + 2) = \vec{c}\,(-13; -2; 17)$.

**41.9.**° Знайдіть модуль вектора $\vec{c} = -6\vec{a} - 7\vec{b}$, якщо $\vec{a}\,(-1; 1; 1)$, $\vec{b}\,(2; 2; -2)$.

$\vec{c} = -6\vec{a} - 7\vec{b}$, $\vec{a}(-1; 1; 1)$, $\vec{b}(2; 2; -2)$, $|\vec{c}|$ – ?

$\vec{c}\,(-6\cdot(-1) - 7\cdot 2;\ -6\cdot 1 - 7\cdot 2;\ -6\cdot 1 - 7\cdot(-2)) =$

$\vec{c}\,(6 - 14;\ -6 - 14;\ -6 + 14) = \vec{c}\,(-8; -20; 8)$.

$|\vec{c}| = \sqrt{(-8)^2 + (-20)^2 + 8^2} = \sqrt{64 + 400 + 64} = \sqrt{528} =$

$= 2\sqrt{132} = 4\sqrt{33}$.

**41.11.**° Чи є колінеарними вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо $A\,(4; -1; -4)$, $B\,(0; 5; 6)$, $C\,(0; 2; 7)$, $D\,(2; -1; 2)$?

$A(4; -1; -4)$, $B(0; 5; 6)$, $C(0; 2; 7)$, $D(2; -1; 2)$.

$\overrightarrow{AB}\,(0 - 4;\ 5 - (-1);\ 6 - (-4)) = \overrightarrow{AB}\,(-4; 6; 10)$.

$\overrightarrow{CD}\,(2 - 0;\ -1 - 2;\ 2 - 7) = \overrightarrow{CD}\,(2; -3; -5)$.

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, якщо $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

$\frac{-4}{2} = \frac{6}{-3} = \frac{10}{-5}$ $\quad -2 = -2 = -2$ Вектори колінеарні.

**41.13.**° Знайдіть значення $x$ і $y$, при яких вектори $\vec{a}\,(x; y; 2)$ і $\vec{b}\,(-2; 3; 1)$ будуть колінеарними.

$\vec{a}(x; y; 2)$, $\vec{b}(-2; 3; 1)$.

$\vec{a} \parallel \vec{b}$, якщо $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

$\frac{x}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{2}{1}$

$y = 6 \quad x = -4$

$\vec{a}(-4; 6; 2)$.

**41.15.**'' Дано вектор $\vec{a}$ (3; 2; 1). Знайдіть колінеарний йому вектор $\overline{AB}$, якщо $A$ (1; 1; 1), а точка $B$ належить площині $yz$.

$\vec{a}(3; 2; 1)$, $A(1; 1; 1)$, $B(0; y; z)$.

$\vec{AB}(0-1; y-1; z-1) = \vec{AB}(-1; y-1; z-1)$.

$\vec{AB} \parallel \vec{a}$, якщо $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

$\frac{-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$ $\qquad -\frac{1}{3} = \frac{z-1}{1}$

$y - 1 = \frac{-1 \cdot 2}{3}$ $\qquad z - 1 = \frac{1 \cdot (-1)}{3}$

$y - 1 = \frac{-2}{3}$ $\qquad z = -\frac{1}{3} + 1$

$y = -\frac{2}{3} + 1$ $\qquad z = \frac{2}{3}$

$y = \frac{1}{3}$

$\vec{B}(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3})$, $\vec{AB}(-1; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3})$.

**Домашнє завдання:** розв'язати задачі (в зошиті):

1)

**. Знайдіть суму $\vec{c} + \vec{d}$, якщо:**

**1)** $\vec{c}(4; 2; -5)$, $\vec{d}(0; 0; 5)$; **2)** $\vec{c}(2; -3; 4)$, $\vec{d}(-3; -3; 5)$.

2)

2. Дано вектор $\vec{b}(3; -6; 0)$. Знайдіть координати вектора:

1) $2\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{b}$; 3) $8\vec{b}$; 4) $-2\vec{b}$.

3)

4. Задано вектори $\vec{a}(0; -1; 4)$ і $\vec{b}(1; -2; 3)$. Знайдіть координати векторів:

1) $3\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - 2\vec{b}$; 3) $2\vec{a} + 4\vec{b}$; 4) $5\vec{a} - 3\vec{b}$.

**Зворотній зв'язок:**

**E-mail** t.anastasia.igorivna@gmail.com