

18.10

Група Б-1

Вища математика

Урок 47-48

Тема: Похідна складеної функції

Мета: формувати в учнів уміння й навички застосовувати правила диференціювання під час розв'язування вправ; розвивати просторову уяву, мислення, виховувати інтерес до математики.

Матеріали до уроку:

Позначимо $u(x_0) = u$, $v(x_0) = v$, $u'(x_0) = u'$, $v'(x_0) = v'$.

Правило 1. Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо $y=C$, де $C=const$, то $y' = 0$.

Правило 2. Якщо функції u і v диференційовані в точці x_0 , то їх сума (різниця) диференційована в цій точці

Коротко. Похідна алгебраїчної суми скінченної кількості диференційованих функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій:

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x), \text{ або } (u \pm v)' = u' \pm v'. \quad (5)$$

Правило 3. Якщо функції u і v диференційовані в точці x_0 , то їхній добуток диференційований у цій точці і

$$(uv)' = u'v + uv'. \quad (6)$$

Похідна добутку двох диференційованих функцій дорівнює добутку першого множника на похідну другого плюс добуток другого множника на похідну першого.

Наслідок. Сталий множник можна виносити за знак похідної:

$$(Cu)' = Cu'. \quad (7)$$

Правило 4. Якщо функції u і v диференційовані в точці x_0 і функція $v \neq 0$ в цій точці, то їх частка $\frac{u}{v}$ також диференційована в точці x_0 і

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \quad (8)$$

Якщо чисельник і знаменник дроби диференційовані функції (знаменник не перетворюється в нуль), то похідна дроби також дорівнює дроби,

чисельник якого є різницею добутків знаменника на похідну чисельника і чисельника на похідну знаменника, а знаменник є квадратом знаменника початкового дроби.

Зауваження. Похідну від функції $y = \frac{u(x)}{c}$, де $c = \text{const}$, зручно обчислювати як похідну від добутку сталої величини $\frac{1}{c}$ на функцію $u(x)$:

$$\left(\frac{u(x)}{c}\right)' = \left(\frac{1}{c}u(x)\right)' = \frac{1}{c}u'(x).$$

Правило 5 (Похідна складеної функції).

Нехай $y=f(u)$, де $u = g(x)$, тобто $y = f(g(x))$. Функція $f(u)$ називається зовнішньою, а функція $g(x)$ – внутрішньою, або проміжним аргументом.

Якщо функція $f(x)$ диференційована в точці x_0 і функція g - похідну в точці $y_0 = f(x_0)$, то складена функція $h(x) = g(f(x))$ також має похідну в точці x_0 , причому

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad (9)$$

Похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною.

Таблиця похідних від складених функцій

1. $C' = 0$

2. $x' = 1$

3. $(u^n)' = nu^{n-1}u'$

4. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

5. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$

6. $(e^u)' = e^u \cdot u'$

7. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

8. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$

9. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

10. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

11. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

12. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

13. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

14. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

15. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

16. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

де u диференційована функція від x , а C – постійна величина.

Приклад 2. Знайти похідні функцій:

$$y = x^3 \cdot \sqrt{x}, \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}, \quad y = \sqrt[3]{(6x^5 - 12x^3 - x + 1)^2}.$$

Розв'язання:

1) $y = x^3 \cdot \sqrt{x}$

За формулою $y'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$ знайдемо похідну:

$$y = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{2}}, \quad \text{тоді } y'(x) = (x^{\frac{7}{2}})' = \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} = \frac{7}{2}\sqrt{x^5}.$$

2) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

Диференціюємо функцію за формулами $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 2x}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1-x^2)}{(x-1)^2} = -\frac{2x}{(x-1)^2}$$

3) $y = \sqrt[3]{(6x^5 - 12x^3 - x + 1)^2}$

Диференціюємо функцію за формулою $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sqrt[3]{(6x^5 - 12x^3 - x + 1)^2} \right)' = \left((6x^5 - 12x^3 - x + 1)^{\frac{2}{3}} \right)' = \\ &= \frac{2}{3} (6x^5 - 12x^3 - x + 1)^{\frac{2}{3}-1} \cdot (6x^5 - 12x^3 - x + 1)' = \frac{2}{3} (6x^5 - 12x^3 - x + 1)^{\frac{1}{3}} \times \\ &\times (30x^4 - 36x^2 - 1) = \frac{2}{3\sqrt[3]{6x^5 - 12x^3 - x + 1}} (30x^4 - 36x^2 - 1) \end{aligned}$$

Домашнє завдання:

1. Знайдіть значення похідної функції $f(x)$ при заданому значенні аргумента x_0 :

а) $f(x) = \frac{2}{1-x}$, $x_0 = -1$. (2 бали)

б) $f(x) = x \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$. (2 бали)

2. Знайдіть похідну функцій:

а) $y = (x^2 + 1)(x^3 - 1)$. (2 бали)

б) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4}$. (2 бали)

в) $y = \frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2}$. (4 бали)

Зворотній зв'язок

E-mail vitasergiivna1992@gmail.com