18.09.2023
Група 32
Математика (алгебра)
Урок 3-4
Тема: Правила знаходження первісної
Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати знання з фізики під час розв'язування прикладних задач; формувати уяву про процеси у природі;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення фізики та астрономії; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення фізики та астрономії, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Під час знаходження похідних функцій ви користувалися правилами диференціювання. У цьому пункті ми розглянемо правила знаходження первісних.

Теорема 10.1. ***Якщо функції F і G є відповідно первісними функцій f і g на проміжку I, то на цьому проміжку функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$.***

Доведення. З умови випливає, що для будь-якого $x \in I$ виконуються рівності $F'(x) = f(x)$ і $G'(x) = g(x)$. Тоді для всіх x із проміжку I маємо:

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Отже, функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$ на проміжку I. ◄

З теореми 10.1 випливає, що

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C,$$

де C — довільне число.

Аналогічно можна довести, що

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx = F(x) - G(x) + C.$$

Теорема 10.2. ***Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та k — деяке число, то на цьому проміжку функція $y = kF(x)$ є первісною функції $y = kf(x)$.***

Тепер можна записати:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x) + C,$$

де C — довільне число.

Задача 1. Знайти всі первісні для функції:

1) $f(x) = x^7$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$.

Розв'язання. Використаємо той факт, що загальний вигляд первісних для функції x^{α} такий: $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$.

1) $F(x)=\dfrac{x^{7+1}}{7+1}+C$; $F(x)=\dfrac{x^8}{8}+C$.

2) Оскільки $f(x) = x^{-5}$, то $F(x)=\dfrac{x^{-5+1}}{-5+1}+C$; $F(x)=\dfrac{x^{-4}}{-4}+C$; $F(x)=-\dfrac{1}{4x^4}+C$.

Відповідь. 1) $\dfrac{x^8}{8}+C$; 2) $-\dfrac{1}{4x^4}+C$.

Іноді, щоб знайти первісну (невизначений інтеграл) для деякої функції, її попередньо треба спростити.

Задача 2. Знайти невизначений інтеграл

$$\int\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)dx.$$

Розв'язання. Оскільки $\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}=\cos\left(2\cdot\dfrac{x}{2}\right)=\cos x$, то маємо $\int\left(\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)dx=\int\cos x\,dx=\sin x+C$.

Відповідь. $\sin x + C$.

Часто в задачах потрібно знайти первісну, що відповідає певним умовам, наприклад, графік якої проходить через певну точку.

Задача 3. Для функції $f(x) = \sin x$ знайти первісну, графік якої проходить через точку $A\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{1}{2}\right)$.

Розв'язання. 1) Для функції $f(x) = \sin x$ знаходимо загальний вигляд первісних: $F(x) = -\cos x + C$.

2) За умовою графік шуканої первісної проходить через точку $A\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{1}{2}\right)$. Тому, підставляючи в загальний вигляд первісних $\dfrac{\pi}{3}$ замість x, а $\dfrac{1}{2}$ замість $F(x)$, маємо: $\dfrac{1}{2}=-\cos\dfrac{\pi}{3}+C$; $\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}+C$; $C=1$. Отже, шукана первісна $F_1(x) = -\cos x + 1$.

Відповідь. $-\cos x + 1$.

Задача 4. **Знайти загальний вигляд первісних функції:**

1) $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 2) $f(x) = 5\sin x$.

Розв'язання. 1) Оскільки $\dfrac{x^4}{4}$ – первісна для x^3, а $\operatorname{tg}x$ – первісна для $\dfrac{1}{\cos^2 x}$, то, використовуючи правило 1, матимемо загальний вигляд первісних для заданої функції

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \operatorname{tg}x + C.$$

2) Оскільки $-\cos x$ – первісна для $\sin x$, то, використовуючи правило 2, матимемо загальний вигляд первісних для заданої функції $F(x) = -5\cos x + C$.

Відповідь. 1) $\dfrac{x^4}{4} + \operatorname{tg}x + C$; 2) $-5\cos x + C$.

Задача 5. Знайти невизначений інтеграл

$$\int\left(4x^3 - \frac{2}{\sin^2 x}\right)dx.$$

Розв'язання. Використовуючи правила 1 і 2, матимемо:

$$\int\left(4x^3 - \frac{2}{\sin^2 x}\right)dx = \int 4x^3dx - \int\frac{2}{\sin^2 x}dx = 4\int x^3dx - 2\int\frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= 4\cdot\frac{x^4}{4} - 2\cdot(-\operatorname{ctg}x) + C = x^4 + 2\operatorname{ctg}x + C.$$

Відповідь. $x^4 + 2\operatorname{ctg}x + C$.

Задача 6. Знайти загальний вигляд первісних для функції

$$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{8}\right).$$

Розв'язання. Для $\cos x$ однією з первісних є $\sin x$. Використовуючи правило 3, матимемо загальний вигляд первісних для заданої функції $F(x) = \dfrac{1}{2}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{8}\right) + C$.

Відповідь. $\dfrac{1}{2}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{8}\right) + C$.

Задача 7. Для функції $f(x) = \left(\frac{1}{9}x - 1\right)^8$ знайти первісну $F(x)$ таку, що $F(18) = 3$.

Розв'язання. 1) Використовуючи правило 3 і той факт, що однією з первісних для функції x^8 є $\frac{x^9}{9}$, матимемо:

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{9}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{9}x - 1\right)^9}{9} + C; F(x) = \left(\frac{1}{9}x - 1\right)^9 + C.$$

2) Оскільки $F(18) = 3$, то $3 = \left(\frac{1}{9} \cdot 18 - 1\right)^9 + C$; $3 = 1^9 + C$; $C = 2$.

Отже, $F(x) = \left(\frac{1}{9}x - 1\right)^9 + 2$.

Відповідь. $\left(\frac{1}{9}x - 1\right)^9 + 2$.

Домашнє завдання: розв'язати задачі (в зошиті):

1) Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій:

1) $f(x) = x + 2$;　　2) $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$;

3) $f(x) = 18x^2 - 22x^{10}$;　　4) $f(x) = x^5 + \frac{2}{\sqrt{x}}$.

2) Знайдіть невизначений інтеграл:

1) $\int \left(\frac{1}{x^4} - 3\right)dx$;　　2) $\int (2\cos x + 5\sin x)dx$.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com