17.11.2023

Група 24

Математика (алгебра)

Урок 15-16

Тема: Підсумки розділу І «Показникова та логарифмічна функція». Підготовка до контрольної роботи №1 «Показникова і логарифмічна функція»

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Властивості функції $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$

Область визначення	$\mathbb{R}$
Область значень	$(0; +\infty)$
Нулі функції	–
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на $\mathbb{R}$
Зростання/спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Диференційовність	Диференційовна

Показникові рівняння

При $a > 0$ і $a \neq 1$ рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2$.

Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

Показникові нерівності

Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$; якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.

Логарифм і його властивості

Логарифмом додатного числа b з основою a, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a, щоб отримати число b.

Основна логарифмічна тотожність:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконуються рівності:
$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

Якщо $x > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то для будь-якого $\beta \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$.

Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, то виконується рівність $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, то виконується рівність $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, то для будь-якого $\beta \neq 0$ виконується рівність $\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b$.

Властивості функції $y = \log_a x$

Область визначення	$(0; +\infty)$
Область значень	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 1$
Проміжки знакосталості	Якщо $a > 1$, то $y < 0$ на проміжку $(0; 1)$, $y > 0$ на проміжку $(1; +\infty)$; якщо $0 < a < 1$, то $y < 0$ на проміжку $(1; +\infty)$, $y > 0$ на проміжку $(0; 1)$
Зростання / спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Диференційовність	Диференційовна

Логарифмічні рівняння

Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, то рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне будь-якій із систем $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Логарифмічні нерівності

Якщо $a > 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Розподіл варіантів: 1-8 в списку – 1 варіант, 9-16 в списку – 2 варіант, 17-24 в списку – 3 варіант, 25-30 в списку – 4 варіант.

Варіант 0

1. *(2 бали)* Знайдіть область визначення функції $y = \lg(x-3)$.

$y = \lg(x-3)$

$x - 3 > 0$

$x > 3$

$D(y) = (3; +\infty).$

2. *(6 балів)* Розв'яжіть рівняння:

1) $16^x = 8^{x+2}$; 2) $\log_3(x-7) = 2$;

3) $\log_5(x^2 - 4x - 5) = \log_5(-4x - 1)$; 4) $2 \cdot 3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 24$;

5) $\log_2(x+3) + \log_2(x-1) = 5$.

1) $16^x = 8^{x+2}$

$(2^4)^x = (2^3)^{x+2}$

$2^{4x} = 2^{3x+6}$

$4x = 3x+6$

$4x-3x = 6$

$x = 6$

2) $\log_3(x-7) = 2$

ОДЗ: $x-7>0$

$x>7$

$x-7 = 3^2$

$x-7 = 9$

$x = 9+7$

$x = 16$

3) $\log_5(x^2-4x-5) = \log_5(-4x-1)$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-4x-5>0 \\ -4x-1>0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x+1)(x-5)>0, \\ -4x>1; \end{cases}$

$\begin{cases} x \in (-\infty;-1)\cup(5;+\infty), \\ x<-\frac{1}{4}; \end{cases}$

$\begin{cases} x \in (-\infty;-1)\cup(5;+\infty), \\ x \in (-\infty;-\frac{1}{4}] \end{cases}$

$x \in (-\infty;-\frac{1}{4})$.

$x^2-4x-5 = -4x-1$

$x^2-\cancel{4x}+\cancel{4x} = -1+5$

$x^2 = 4$

$x_1 = 2$ – не задов. ОДЗ.

$x = -2$

4) $2\cdot 3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 24$

$2\cdot 3^x\cdot 3^{-1} - 3^x + 3^x\cdot 3 = 24$

$3^x(2\cdot 3^{-1} - 1 + 3) = 24$

$3^x(\frac{2}{3} - 1 + 3) = 24$

$3^x(\frac{2}{3} + \overset{3}{2}) = 24$

$3^x\cdot\frac{2+6}{3} = 24$

$3^x\cdot\frac{8}{3} = 24$

$3^x = 24 : \frac{8}{3}$

$3^x = \overset{3}{\cancel{24}}\cdot\frac{3}{\cancel{8}}$

$3^x = 9$

$3^x = 3^2$

$x = 2$

5) $\log_2(x+3) + \log_2(x-1) = 5$

$\log_2(x+3)(x-1) = 5$

ОДЗ: $\begin{cases} x+3>0, \\ x-1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-3, \\ x>1; \end{cases}$

$x \in (1;+\infty)$.

$(x+3)(x-1) = 2^5$

$x^2-x+3x-3 = 32$

$x^2+2x-3-32 = 0$

$x^2+2x-35 = 0$

$\begin{cases} x_1+x_2 = -2, \\ x_1 x_2 = -35; \end{cases}$ | $x_1 = -7$ – не задов. ОДЗ. $x_2 = 5$

3. *(4 бали)* Скільки цілих розв’язків у кожній з нерівностей:

1) $2^{3x-5} > 4^{1-x}$; 2) $\frac{1}{16} < 4^{x+1} \leq 64$; 3) $\log_4(6-x) \geq \log_4(x-2)$.

1) $2^{3x-5} > 4^{1-x}$

$2^{3x-5} > (2^2)^{1-x}$

$2^{3x-5} > 2^{2-2x}$

$2 > 1$, отже $3x-5 > 2-2x$

$3x+2x > 2+5$

$5x > 7$

$x > \frac{7}{5}$

$x > 1,4$

$x \in (1,4; +\infty)$.

2) $\frac{1}{16} < 4^{x+1} \leq 64$

$\begin{cases} 4^{x+1} > \frac{1}{16}, \\ 4^{x+1} \leq 64; \end{cases}$

$\begin{cases} 4^{x+1} > 4^{-2}, \\ 4^{x+1} \leq 4^3; \end{cases}$

$4 > 1$, отже $\begin{cases} x+1 > -2, \\ x+1 \leq 3; \end{cases}$

$\begin{cases} x > -2-1, \\ x \leq 3-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -3, \\ x \leq 2; \end{cases}$

$x \in (-3; 2]$.

3) $\log_4(6-x) \geq \log_4(x-2)$

ОДЗ: $\begin{cases} 6-x > 0, \\ x-2 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -x > -6, \\ x > 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 6, \\ x > 2; \end{cases}$ $x \in (2; 6)$

$4 > 1$, отже $6-x \geq x-2$

$-x-x \geq -2-6$

$-2x \geq -8$

$x \leq \frac{-8}{-2}$

$x \leq 4$

Враховуючи ОДЗ, $x \in (2; 4]$.

Відповідь: 1) безліч цілих розв'язків; 2) 5 цілих розв'язків; 3) 2 цілих розв'язки.

Домашнє завдання: розв'язати задачі (в зошиті) з підготовки до контрольної роботи:

Тест № 1

1. Знайдіть область визначення функції $y=\log_5(6-2x)$.

А $(-\infty;+\infty)$ Б $(-\infty;-3)$ В $(-\infty;3)$ Г $(0;+\infty)$ Д $(3;+\infty)$

2. Знайдіть область значень функції $y=-5^x+2$.

А $(-\infty;+\infty)$ Б $(-\infty;-2)$ В $(-\infty;2)$ Г $(-2;+\infty)$ Д $(2;+\infty)$

3. Розв'яжіть рівняння $2^{1-3x}=\frac{1}{32}$ і вкажіть проміжок, до якого входять всі його корені.

А $(-\infty;-5)$ Б $[-5;-2)$ В $[-2;0)$ Г $[0;2)$ Д $[2;+\infty)$

4. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5}(x-3)\geqslant-1$.

А $(-\infty;3)$ Б $(3;5]$ В $(3;5)$ Г $[3;5)$ Д $[5;+\infty)$

5. Установіть відповідність між виразами (1–3) та значеннями (А–Г) цих виразів.

1 $\ln\log_2\log_5 25$	А 9
2 $\lg 25+\lg 4$	Б 2
3 $5^{2\log_5 3}$	В 1
	Г 0

6. Розв'яжіть рівняння $4\cdot5^x-25\cdot2^x=0$.

7. Розв'яжіть рівняння $\log_5(x-1)+\log_5(x-5)=1$. Якщо воно має декілька коренів, знайдіть їх добуток.

8. Розв'яжіть нерівність $0,5^{2x}-3\cdot0,5^x+2<0$.

Зворотній зв'язок:
E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com