14.11.2023
Група 36
Математика (алгебра)
Урок 9-10
Тема: Застосування визначених інтегралів
Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати знання з фізики під час розв'язування прикладних задач; формувати уяву про процеси у природі;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення фізики та астрономії; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення фізики та астрономії, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Правило 3. **Якщо $F(x)$ — первісна для $f(x)$, а k і b — деякі сталі, причому $k \neq 0$, тоді $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна для функції $f(kx+b)$.**

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$$

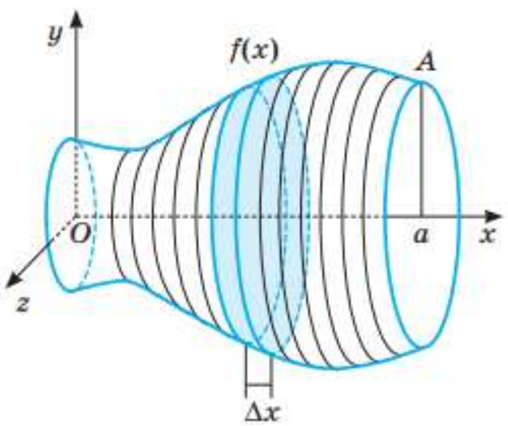
За допомогою інтегралів можна визначати не тільки площі фігур, а й багато інших величин, наближені значення яких виражаються інтегральними сумами, тобто сумами виду $\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n)$. Такі суми коротко позначають $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$. Підграфік функції $f(x)$ — математична модель кожної такої величини, тому обчислювати границі цих сум також можна за формулою Ньютона—Лейбніца. Розглянемо три приклади таких задач.

Об'єм тіла обертання. Кожне тіло обертання можна уявити складеним з дуже великої кількості круглих пластинок чи циліндрів з малими висотами Δx (мал. 48).

Радіус кожного такого циліндра залежить від змінної x і дорівнює $f(x)$. Об'єм одного циліндрика, що відповідає змінній x, дорівнює $\pi f^2(x)\Delta x$. Усьому тілу обертання відповідає інтегральна сума $\pi f^2(x_1)\Delta x + \pi f^2(x_2)\Delta x + \ldots + \pi f^2(x_n)\Delta x$.

Отже, його об'єм $V = \int_0^a \pi f^2(x)\,dx$ або

$$V = \pi\int_0^a f^2(x)\,dx.$$

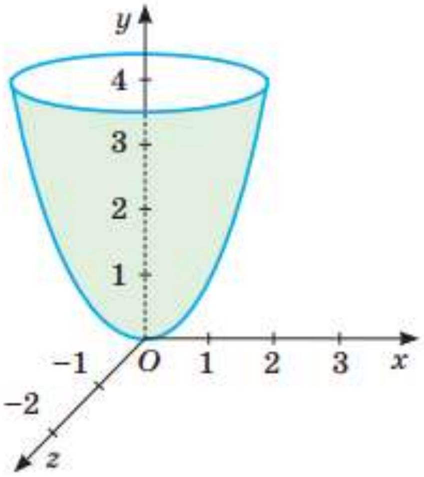


0

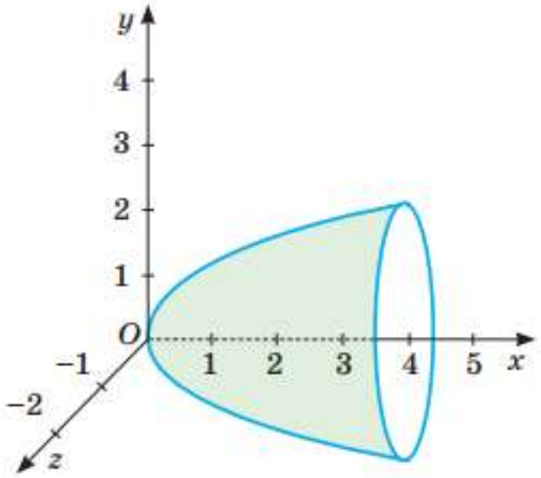
Δx

Мал. 48

Приклад. Нехай треба знайти місткість посудини заввишки 4 дм, осьовий переріз якої — графік функції $y = x^2$ (мал. 49).



Мал. 49



Мал. 50

Для невід'ємних значень x графік такої функції симетричний відносно бісектриси першого координатного кута графіка функції $y = \sqrt{x}$. Тому шуканий об'єм посудини дорівнює об'єму тіла, утвореного обертанням підграфіка функції $y = \sqrt{x}$ на проміжку [0; 4] навколо осі x (мал. 50).

Отже, шуканий об'єм $V = \pi\int\limits_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\int\limits_0^4 x dx = 8\pi$ (дм³).

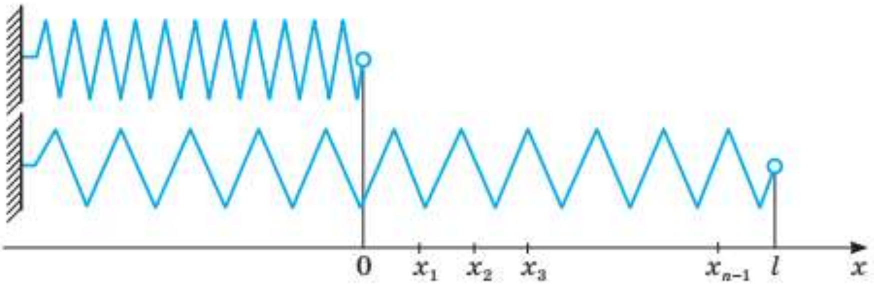
За допомогою визначених інтегралів можна обчислити об'єми не лише тіл обертання, але й багатьох інших тіл — пірамід, зрізаних пірамід тощо.

Робота змінної сили. Якщо внаслідок дії сталої сили F тіло переміщується в напрямі сили на відстань s, то виконується робота $A = Fs$. А якщо на тіло діє сила не стала, а змінна?

Приклад. Щоб розтягнути пружину на 1 см, на 2 см і т. д., треба прикладати дедалі більшу й більшу силу. Згідно із законом Гука, сила $f(x)$, яку треба прикласти, щоб розтягнути пружину на відстань x, пропорційна цій відстані (для допустимих значень x), тобто $f(x) = kx$. Коефіцієнт k різний для різних пружин. Наприклад, якщо для розтягнення пружини на 1 м треба прикласти силу в 50 Н, то $k = 50$.

Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути таку пружину на відстань $l = 2$ м?

Поділимо відрізок $[0; l]$, на який розтягується пружина, точками x_1, x_2, x_3,..., x_{n-1} на n рівних частин (мал. 51). Нехай $l = x_n$, а Δx — довжина кожної частини. Щоб розтягнути пружину на відстань $[0; x_1]$, тобто перемістити її кінець з точки 0 в x_1, треба прикласти силу $f(x_1)$. У цьому разі виконана робота наближено дорівнюватиме $\Delta x \cdot f(x_1)$. Щоб розтягнути пружину на відстань $[x_1, x_2]$, треба прикласти силу $f(x_2)$ та виконати роботу, яка приблизно дорівнює $\Delta x \cdot f(x_2)$ і т. д. Отже, щоб розтягнути пружину на відстань $[0; l]$, треба виконати роботу, значення якої приблизно дорівнює інтегральній сумі $A_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) +... + \Delta x \cdot f(x_n)$.



Мал. 51

Значення A_n зі збільшенням n (і відповідним зменшенням Δx) дедалі менше відрізнятиметься від точного значення шуканої роботи A, тобто якщо $n \to \infty$, то $A_n \to A$. Отже, $A = \int_0^l f(x)\,dx = \int_0^l kx\,dx = \frac{1}{2}kl^2$.

Якщо $k = 50$, $l = 2$ м, то $A = 100$ Дж.

Економічний зміст інтеграла. Нехай функція $y = f(x)$ описує зміну продуктивності деякого підприємства протягом певного часу. Знайдемо обсяг продукції U, виробленої за проміжок часу $[0; T]$.

Зазначимо, що коли продуктивність не змінюється протягом часу ($f(t)$ — стала функція), то обсяг продукції ΔU, виробленої за деякий проміжок часу $[t; t + \Delta t]$ визначається формулою $\Delta U = f(t)\Delta t$. У загальному випадку справедлива наближена рівність $\Delta U \approx f(t)\Delta t$, де $t \in [t; t+\Delta t]$, яка буде тим точніша, чим менше Δt.

Поділимо відрізок $[0; T]$ на n рівних частин точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ $\ldots < t_n = T$. Для обсягу продукції ΔU_k, виробленої за проміжок часу $\Delta t = [t_{k-1}; t_k]$, маємо: $\Delta U_k \approx f(t_k)\Delta t$, де $t_k \in [t_{k-1}; t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Отже,

$$U \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta U_k = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t.$$

Якщо $\Delta t \to 0$, то кожна з використаних наближених рівностей стає точнішою, отже,

$$U = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t.$$

Якщо $f(t)$ — продуктивність праці в момент часу t, то обсяг виробленої продукції за проміжок $[0; T]$ можна обчислити за формулою

$$U = \int_0^T f(t)\,dt.$$

Виконаємо разом

1) Продуктивність праці бригади робітників протягом зміни визначається формулою $f(t) = -2{,}53t^2 + 24{,}75t + 111{,}1$, де t — робочий час у годинах. Визначте обсяг продукції, виготовленої за 5 робочих годин.

Розв'язання. Обсяг випуску продукції протягом зміни є первісною від функції, що виражає продуктивність праці. Тому

$$U = \int_0^5 f(t)\,dx = \int_0^5 \left(-2{,}53t^2 + 24{,}75t + 111{,}1\right)dt =$$

$$=\left(-\frac{2,53t^3}{3}+\frac{24,75t^2}{2}+111,1t\right)\Bigg|_0^5=-\frac{2,53\cdot125}{3}+\frac{24,75\cdot25}{2}+111,1\cdot5=$$

$$=-\frac{316,25}{3}+\frac{618,75}{2}+555,5\approx759 \text{ (од.)}.$$

2) Точка рухається прямолінійно зі змінною швидкістю $v = 10t$ м/с; за перші 4 с вона пройшла 80 м. Знайдіть закон руху точки.

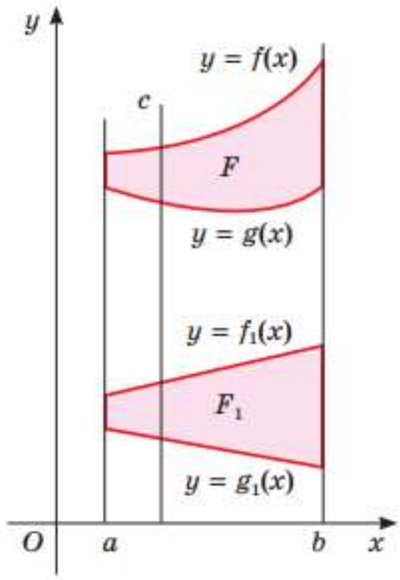
Розв'язання. Шуканий закон руху виражається такою функцією $s = s(t)$, що $s'(t) = 10t$. Тут $s(t)$ — первісна для функції $v = 10t$. Загальний вигляд таких первісних — $s(t) = 5t^2 + C$. Оскільки за 4 с точка пройшла 80 м, то $80 = 5 \cdot 16 + C$, звідки $C = 0$. Шуканий закон руху точки $s(t) = 5t^2$, де t — час у секундах, $s(t)$ — відстань у метрах.

3) Доведіть твердження Кавальєрі. Якщо дві фігури можна розмістити на площині так, що кожна січна, паралельна даній прямій, перетинаючи одну з них, перетинає і другу по відрізку такої самої довжини, то площі цих фігур рівні.

Розв'язання. Нехай фігуру F обмежують лінії $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ і $y = g(x)$, а фігуру F_1 — лінії $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$ і $y = g_1(x)$ (мал. 52). Якщо кожна січна c, паралельна осі y, перетинає фігури F і F_1 по відрізках рівної довжини, то $f(x) - g(x) = f_1(x) - g_1(x)$ для кожного $x \in [a; b]$. Тоді

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx=\int_a^b (f_1(x)-g_1(x))\,dx,$$

тобто площі фігур F і F_1 рівні.



Мал. 52

Домашнє завдання: розв'язати задачі (в зошиті):

1) Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі x фігури, обмеженої заданими лініями:

$$y = x^2,\ x = 1,\ y = 0.$$

2) Тіло рухається зі швидкістю $v(x)$. Знайдіть шлях (у м), пройдений тілом за проміжок часу (у с) від t_1 до t_2

$$v(t) = 10t,\ t_1 = 0,\ t_2 = 4.$$

3) Продуктивність праці робітника протягом дня визначається функцією $z(t) = -0{,}00645t^2 + 0{,}05t + 0{,}5$ (грош. од./год), де t — час у годинах від початку роботи, $0 \le t \le 8$. Знайдіть обсяг продукції (у грошових одиницях), виготовленої за робочий день.

Зворотній зв'язок:
E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com