13.11.2023

Група 23

Математика (алгебра)

Урок 14-15

Тема: Розв'язування задач з теми: «Показникові рівняння». Показникові нерівності

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Задача 1. Розв'язати рівняння:

1) $2^x = 32$; 2) $3^{x-1} = \sqrt[5]{9}$; 3) $4^{x^2-2x} = 1$.

Розв'язання. 1) $2^x = 32$; $2^x = 2^5$; $x = 5$.

2) $3^{x-1} = \sqrt[5]{9}$; $3^{x-1} = (3^2)^{\frac{1}{5}}$; $3^{x-1} = 3^{\frac{2}{5}}$; $x-1 = \frac{2}{5}$; $x = 1\frac{2}{5}$.

3) $4^{x^2-2x} = 1$; $4^{x^2-2x} = 4^0$; $x^2 - 2x = 0$; $x(x-2) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

Відповідь. 1) 5; 2) $1\frac{2}{5}$; 3) 0; 2.

Задача 2. Розв'язати рівняння:

1) $4^x = 8^{x-1}$; 2) $2^x \cdot 3^x = \left(\frac{1}{6}\right)^{5-2x}$.

Розв'язання. 1) Зведемо обидві частини рівняння до степеня з однією і тією самою основою. Такою основою є число 2. Маємо: $(2^2)^x = (2^3)^{x-1}$; $2^{2x} = 2^{3x-3}$. Звідси $2x = 3x - 3$; $x = 3$.

2) Оскільки $2^x \cdot 3^x = 6^x$, а $\left(\frac{1}{6}\right)^{5-2x} = (6^{-1})^{5-2x} = 6^{2x-5}$, то початкове рівняння рівносильне такому: $6^x = 6^{2x-5}$. Звідси $x = 2x - 5$; $x = 5$.

Відповідь. 1) 3; 2) 5.

Задача 3. Розв'язати рівняння
$$12 \cdot 5^{x-1} + 3 \cdot 5^x - 5^{x+1} = 10.$$

Розв'язання. $12 \cdot 5^x \cdot 5^{-1} + 3 \cdot 5^x - 5^x \cdot 5^1 = 10;$

$5^x\left(12 \cdot \frac{1}{5} + 3 - 5\right) = 10;\ 5^x \cdot \frac{2}{5} = 10;\ 5^x = 10 : \frac{2}{5};\ 5^x = 25;\ 5^x = 5^2;$

$x = 2.$

Відповідь. 2.

Задача 4. Розв'язати рівняння $2^{x-1} = 5^{x-1}$.

Розв'язання. Поділимо ліву і праву частини рівняння на $5^{x-1} \neq 0$. Маємо: $\frac{2^{x-1}}{5^{x-1}} = 1;\ \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^0;\ x - 1 = 0;\ x = 1.$

Відповідь. 1.

Задача 5. Розв'язати рівняння $3 \cdot 25^x - 2 \cdot 5^x = 1$.

Розв'язання. Нехай $5^x = t > 0$, тоді $25^x = 5^{2x} = (5^x)^2 = t^2$. Маємо: $3t^2 - 2t - 1 = 0;\ t_1 = 1;\ t_2 = -\frac{1}{3}$ – не задовольняє умову $t > 0$.

Отже, $5^x = 1;\ 5^x = 5^0;\ x = 0.$

Відповідь. 0.

Задача 6. Розв'язати рівняння $\frac{5}{2^{\sqrt{x}}+1} + 2 = \frac{6}{2^{\sqrt{x}}-2}$.

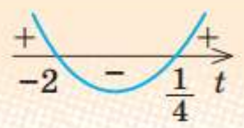
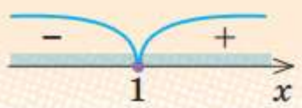
Розв'язання. Нехай $2^{\sqrt{x}} = t,\ t > 0$, тоді $\frac{5}{t+1} - \frac{6}{t-2} + 2 = 0.$

Розв'язавши останнє рівняння, маємо $t_1 = 4;\ t_2 = -2{,}5$ – не задовольняє умову $t > 0$. Тоді $2^{\sqrt{x}} = 4;\ 2^{\sqrt{x}} = 2^2;\ \sqrt{x} = 2;\ x = 4.$

Відповідь. 4.

2. Схема рівносильних перетворень найпростіших показникових нерівностей	
$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ *знак нерівності зберігається*	$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ *знак нерівності змінюється на протилежний*
Приклади	
$2^{x-3} > 4.$ ▸ $2^{x-3} > 2^2.$ Функція $y = 2^t$ є зростаючою, отже: $x - 3 > 2;\ x > 5.$ *Відповідь*: $(5; +\infty)$. ■	$0{,}7^{x-3} > 0{,}49.$ ▸ $0{,}7^{x-3} > 0{,}7^2.$ Функція $y = 0{,}7^t$ є спадною, отже: $x - 3 < 2;\ x < 5.$ *Відповідь*: $(-\infty; 5)$. ■

3. Розв'язування показникових нерівностей, які зводяться до найпростіших

Орієнтир	Приклад
I. За допомогою рівносильних перетворень (за схемою розв'язування показникових рівнянь, табл. 3) **задана нерівність зводиться до нерівності відомого виду** (квадратної, дробової тощо). Після розв'язування одержаної нерівності приходимо до найпростіших показникових нерівностей. 	$4^{x+1}+7\cdot 2^x-2>0.$ ▸ $4^x\cdot 4+7\cdot 2^x-2>0;$ $2^{2x}\cdot 4+7\cdot 2^x-2>0.$ Виконаємо заміну $2^x=t$, одержимо нерівність $4t^2+7t-2>0$, множина її розв'язків $t<-2$ або $t>\frac{1}{4}$ (див. рисунок). У результаті оберненої заміни отримаємо $2^x<-2$ (розв'язків немає) або $2^x>\frac{1}{4}$, звідки $2^x>2^{-2}$, тобто $x>-2$. *Відповідь:* $(-2;+\infty)$. ■
II. Застосовуємо загальний метод інтервалів — зводимо задану нерівність до виду $f(x)\gtrless 0$ і використовуємо таку схему. **1. Знайти ОДЗ.** **2. Знайти нулі функції $f(x)$.** **3. Позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які ОДЗ розбивається нулями.** **4. Записати відповідь, ураховуючи знак нерівності.** 	$3^x+4^x>7.$ ▸ Розв'яжемо нерівність методом інтервалів. Задана нерівність рівносильна нерівності $3^x+4^x-7>0$. Позначимо $f(x)=3^x+4^x-7$. 1) ОДЗ: $x\in\boldsymbol{R}$. 2) Нулі функції: $f(x)=0$; $3^x+4^x-7=0$. Оскільки функція $f(x)=3^x+4^x-7$ є зростаючою (як сума двох зростаючих функцій), то значення 0 вона набуває тільки в одній точці області визначення: $x=1$ $\left(f(1)=3^1+4^1-7=0\right)$. 3) Позначаємо нулі функції на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ (див. рисунок), і записуємо множину розв'язків нерівності $f(x)>0$. *Відповідь:* $(1;+\infty)$. ■

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $0{,}6^{x^2-7x+6} \geqslant 1$.

Розв'язання

$0{,}6^{x^2-7x+6} \geqslant 0{,}6^0$.

Оскільки функція $y = 0{,}6^t$ є спадною, то $x^2 - 7x + 6 \leqslant 0$.

Звідси $1 \leqslant x \leqslant 6$ (див. рисунок 2.3.2).

Рис. 2.3.2

Відповідь: $[1; 6]$.

Коментар

Запишемо праву частину нерівності як степінь числа 0,6, тобто $1 = 0{,}6^0$. Оскільки $0{,}6 < 1$, то при переході від порівняння степенів до порівняння показників степеня знак нерівності змінюється на протилежний (одержуємо нерівність, рівносильну заданій).
Для розв'язування одержаної квадратної нерівності використаємо графічну ілюстрацію.

Домашнє завдання: розв'язати задачі (в зошиті):

1) **. Розв'яжіть рівняння:**

1) $5^x + 5^{x+2} = 130$;

2) $2^x + 3 \cdot 2^{x-1} = 20$;

2) **. Розв'яжіть рівняння:**

1) $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$;

3) Розв'яжіть нерівність:

1) $3^x < 3^8$; 2) $5^x \geqslant 5^{-3}$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^2$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^4$.

Зворотній зв'язок:
E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com