13.10.2023

Група 34

Математика (алгебра)

Урок 11-12

Тема: Підсумки розділу II «Інтеграл та його застосування». Підготовка до контрольної роботи №1 «Інтеграл та його застосування»

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати знання з фізики під час розв'язування прикладних задач; формувати уяву про процеси у природі;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення фізики та астрономії; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення фізики та астрономії, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Первісна

Функцію F називають первісною функцією (або коротко первісною) функції f на проміжку I, якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Основна властивість первісної

Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та C — довільне число, то функція $y = F(x) + C$ також є первісною функції f на проміжку I.

Будь-яку первісну функції f на проміжку I можна подати у вигляді $y = F(x) + C$, де C — деяке число.

Невизначений інтеграл

Сукупність усіх первісних функції $y = f(x)$ на проміжку I називають її невизначеним інтегралом і позначають $\int f(x)dx$.

Правила знаходження первісної

Якщо функції F і G є відповідно первісними функцій f і g на проміжку I, то на цьому проміжку функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$.

Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та k — деяке число, то на цьому проміжку функція $y = kF(x)$ є первісною функції $y = kf(x)$.

Площа криволінійної трапеції

Площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y=f(x)$ та прямими $y=0$, $x=a$ і $x=b$ $(a<b)$, можна обчислити за формулою $S=F(b)-F(a)$, де F — будь-яка первісна функції f на проміжку $[a;\ b]$.

Визначений інтеграл

Нехай F — первісна функції f на проміжку I, числа a і b, де $a<b$, належать проміжку I. Різницю $F(b)-F(a)$ називають визначеним інтегралом функції f на проміжку $[a;\ b]$ і позначають

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Формула Ньютона—Лейбніца

$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$, де F — довільна первісна функції f на проміжку $[a;\ b]$.

Підготовка до контрольної роботи №1 «Інтеграл та його застосування»

Приклад 1. Перевірте, чи є функція $F(x)=2\sqrt{x}$ первісною для функції $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ на проміжку $(0;+\infty)$.

Розв'язання

$F'(x)=\left(2\sqrt{x}\right)'=2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, це й означає, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Коментар

За означенням функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, якщо $F'(x)=f(x)$.

Приклад 2. Знайдіть:

1) одну з первісних для функції $f(x)=x^4$ на $\mathbf{R}$;

2) усі первісні для функції $f(x)=x^4$;

3*) $\int x^4dx$.

Розв'язання

1) Однією з первісних для функції $f(x)=x^4$ на множині $\mathbf{R}$ є функція $F(x)=\dfrac{x^5}{5}$, оскільки

$$F'(x)=\left(\frac{x^5}{5}\right)'=\frac{1}{5}\cdot 5x^4=x^4.$$

2) За основною властивістю первісних усі первісні для функції $f(x)=x^4$ можна записати у вигляді

Коментар

1) Первісну для функції $f(x)=x^4$ спробуємо знайти підбором. В процесі можна міркувати так: щоб після знаходження похідної одержати x^4, потрібно брати похідну від x^5. Але $\left(x^5\right)'=5x^4$, щоб похідна дорівнювала x^4, достатньо поставити перед функцією x^5 коефіцієнт $\dfrac{1}{5}$.

Простіше використати формулу з п. 5 табл. 10 (таблиці первісних): *однією з первісних для функції x^{α} є функція*

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

$\frac{x^5}{5}+C$, де C — довільна стала. ■

3*) ▸ $\int x^4dx=\frac{x^5}{5}+C$, де C — довільна стала. ■

2) *Якщо ми знаємо одну первісну* $F(x)$ *для функції* $f(x)$, *то* за основною властивістю первісних *будь-яку первісну для функції* $f(x)$ *можна записати у вигляді* $F(x)+C$, де C — довільна стала.

3) За означенням $\int f(x)dx=F(x)+C$, тобто невизначений інтеграл $\int f(x)dx$ — це спеціальне позначення загального виду всіх первісних для даної функції $f(x)$ (який ми вже знайшли в п. 2 розв'язання).

Приклад 3. Для функції $f(x)=\sqrt{x}$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M(9;10)$.

Розв'язання

▸ $D(f)=[0;+\infty)$. Тоді $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.

Загальний вигляд усіх первісних для функції $f(x)$ такий:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$$

За умовою графік первісної проходить через точку $M(9;10)$, отже, при $x=9$ одержуємо

$$\frac{2}{3}\cdot 9\sqrt{9}+C=10.$$

Звідси $C=-8$. Тоді шукана первісна:

$$\frac{2}{3}x\sqrt{x}-8.\ ■$$

Коментар

Спочатку запишемо загальний вигляд первісних для заданої функції: $F(x)+C$. Потім використаємо те, що графік одержаної функції проходить через точку $M(9;10)$, отже, при $x=9$ значення функції $F(x)+C$ дорівнює 10.

Щоб знайти первісну для функції $f(x)=\sqrt{x}$, урахуємо, що її область визначення $x\geqslant 0$. Тоді цю функцію можна записати так: $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ і використати формулу знаходження первісної для функції x^{α}, а саме: $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$.

Приклад 1. Обчисліть $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}$.

Розв'язання

▸ $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}0=$

$=1-0=1$.

Відповідь: 1. ■

Коментар

Оскільки для функції $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ ми знаємо первісну: $F(x)=\operatorname{tg}x$ (див. табл. 10), то заданий інтеграл можна обчислити безпосереднім застосуванням формули Ньютона — Лейбніца

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Приклад 2. Обчисліть $\int_1^3\left(\frac{4}{x}-x\right)dx$.

Розв'язання	Коментар

I спосіб

Для функції $f(x)=\frac{4}{x}-x$ однією з первісних є функція $F(x)=4\ln|x|-\frac{x^2}{2}$. Тоді

$$\int_1^3\left(\frac{4}{x}-x\right)dx=\left(4\ln|x|-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^3=$$

$$=\left(4\ln|3|-\frac{3^2}{2}\right)-\left(4\ln|1|-\frac{1^2}{2}\right)=$$

$$=4\ln 3-4.$$

II спосіб

$$\int_1^3\left(\frac{4}{x}-x\right)dx=\int_1^3\frac{4dx}{x}-\int_1^3 xdx=$$

$$=4\int_1^3\frac{dx}{x}-\int_1^3 xdx=4\ln|x|\Big|_1^3-\frac{x^2}{2}\Big|_1^3=$$

$$=4(\ln|3|-\ln|1|)-\left(\frac{3^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)=$$

$$=4\ln 3-4.$$

Коментар

Можливі два шляхи обчислення заданого інтеграла.

1) Спочатку знайти первісну для функції $f(x)=\frac{4}{x}-x$, використовуючи правила обчислення первісних і таблицю первісних, а потім знайти інтеграл за формулою Ньютона — Лейбніца.

2) Використати формулу

$$\int_a^b(f(x)+g(x))dx=$$

$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

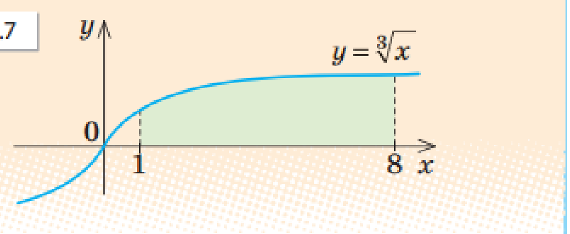
і записати заданий інтеграл як алгебраїчну суму двох інтегралів, кожний із яких можна безпосередньо обчислити, як у прикладі 1 (для першого доданка можна також використати формулу $\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ і винести сталий множник 4 за знак інтеграла).

Приклад 3. Обчисліть площу фігури, обмеженої прямими $x=1$, $x=8$, віссю Ox і графіком функції $y=\sqrt[3]{x}$.

Розв'язання

Зображуючи зазначені лінії, бачимо, що задана фігура — криволінійна трапеція (рис. 7.7).

Рис. 7.7



Тоді її площа

$$S=\int_1^8\sqrt[3]{x}\,dx=\int_1^8 x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\Bigg|_1^8=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_1^8=$$

$$=\frac{3}{4}\left(8^{\frac{4}{3}}-1^{\frac{4}{3}}\right)=\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{8^4}-1\right)=\frac{45}{4}=11\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $11\frac{1}{4}$.

Коментар

Задана фігура є криволінійною трапецією, і тому її площу можна обчислити за формулою

$$S=\int_a^b f(x)dx,$$

де $a=1$, $b=8$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

Також потрібно врахувати, що на заданому відрізку $[1;8]$ значення $x>0$, і за цієї умови можна записати $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$.

Домашнє завдання: розв'язати варіант 0 контрольної роботи в зошиті:

Тест № 2

1. Для функції $f(x)=4x^3$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $A(0;1)$.

А $F(x)=-x^4-1$ В $F(x)=x^4$ Д $F(x)=x^4+1$

Б $F(x)=x^4-1$ Г $F(x)=-x^4+1$

2. Серед наведених нижче функцій вкажіть ту, первісною для якої є функція $F(x)=\operatorname{ctg}x+C$.

А $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ В $f(x)=\operatorname{tg}x$ Д $f(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$

Б $f(x)=-\frac{1}{\cos^2 x}$ Г $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$

3. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції $f(x)=\cos x-e^x$.

А $F(x)=-\sin x-e^x$ В $F(x)=\sin x-e^x+C$ Д $F(x)=\sin x+e^x+C$

Б $F(x)=\sin x-e^x$ Г $F(x)=-\sin x-e^x+C$

4. Установіть відповідність між інтегралами (1–3) та їхніми значеннями (А–Г).

1 $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$	А 1
2 $\int_0^1 x^2 dx$	Б $\frac{7}{24}$
3 $\int_1^2 \frac{1}{x^4}dx$	В $\frac{1}{3}$
	Г $\frac{2}{3}$

5. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y=\frac{1}{x^2}$, прямими $x=1$, $x=4$ та віссю Ox.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com