13.10.2023

Група 23

Математика (алгебра)

Урок 3-4

Тема: Найбільше та найменше значення функції на графіку

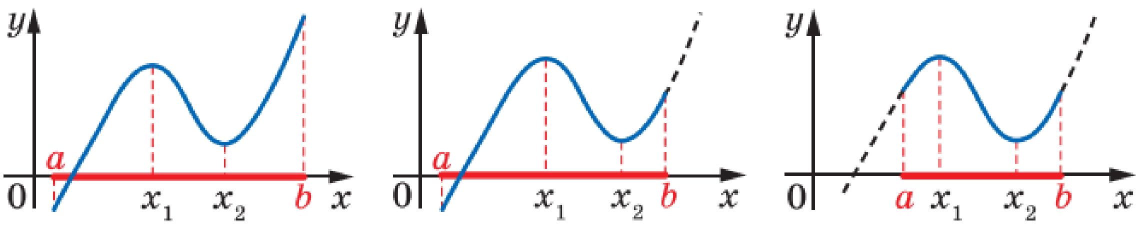
Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Яку кількість продукції треба випустити підприємству, щоб отримати найбільший прибуток? Як, маючи обмежені ресурси, виконати виробниче завдання в найкоротший час? Як організувати доставку товару в торговельні точки так, щоб витрати палива були найменшими? Такі й подібні задачі на пошук оптимального розв'язку займають значне місце в практичній діяльності людини.

У цьому пункті ми з'ясуємо, як можна знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку $[a; b]$. Обмежимося розглядом лише диференційовних функцій.



$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$

а

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$

б

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_2)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$

в

Рис. 24.1

Можна показати, що диференційовна на проміжку $[a; b]$ функція набуває на цьому проміжку найбільшого і найменшого значень або на кінцях відрізка, або в точках екстремуму (рис. 24.1).

Зважаючи на це, пошук найбільшого і найменшого значень диференційовної функції на проміжку $[a; b]$ можна проводити, користуючись такою схемою.

1. Знайти точки функції f, у яких її похідна дорівнює нулю.
2. Обчислити значення функції в тих знайдених точках, які належать розглядуваному проміжку, і на кінцях цього проміжку.
3. З усіх знайдених значень вибрати найбільше і найменше.

24.1.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному проміжку:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3$, $[-1; 3]$;
2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $[0; 2]$;
3) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3$, $[-1; 4]$;
4) $f(x) = \dfrac{x^2 + 8}{x - 1}$, $[-3; 0]$.

1) $f(x) = 3x^2 - x^3$, $[-1; 3]$;

$f'(x) = (3x^2 - x^3)' = 3 \cdot 2x^{2-1} - 3 \cdot x^{3-1} = 6x - 3x^2$

$6x - 3x^2 = 0$

$x(6 - 3x) = 0$

$x_1 = 0$ або $6 - 3x = 0$

$-3x = -6$

$x_2 = 2$

$f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - (-1)^3 = 3 - (-1) = 4$

$f(0) = 3 \cdot 0^2 - 0^3 = 0$

$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 2^3 = 3 \cdot 4 - 8 = 4$

$f(3) = 3 \cdot 3^2 - 3^3 = 27 - 27 = 0$

найбільші значення

найменші значення

Відповідь: $\max\limits_{[-1;\, 3]} f(x) = f(-1) = f(2) = 4$;

$\min\limits_{[-1;\, 3]} f(x) = f(0) = f(3) = 0.$

2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5, \ [0; 2]$

$f'(x) = (x^4 - 2x^2 + 5)' = 4x^{4-1} - 2 \cdot 2x^{2-1} + 0 = 4x^3 - 4x$

$4x^3 - 4x = 0$

$4x(x^2 - 1) = 0$

$4x = 0$ або $x^2 - 1 = 0$

$x_1 = 0$ $\quad x^2 = 1$

$x_2 = 1$ $\quad x_3 = -1$

не належить проміжку.

$f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 5 = 5$

$f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 5 = 1 - 2 + 5 = 4$ - найменше значення.

$f(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^2 + 5 = 16 - 8 + 5 = 13$ - найбільше значення.

Відповідь: $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = 13;$

$\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(1) = 4.$

3) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3, \ [-1; 4].$

$f'(x) = (2x^3 - 9x^2 - 3)' = 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 9 \cdot 2x^{2-1} - 0 = 6x^2 - 18x$

$6x^2 - 18x = 0$

$6x(x - 3) = 0$

$6x = 0$ $\quad x - 3 = 0$

$x_1 = 0$ $\quad x_2 = 3$

$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 9 \cdot (-1)^2 - 3 = -2 - 9 - 3 = -14$

$f(0) = 2 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0^2 - 3 = -3$ - найбільше значення.

$f(3) = 2 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 - 3 = 2 \cdot 27 - 9 \cdot 9 - 3 = 54 - 81 - 3 = -30$ - найменше значення.

$f(4) = 2 \cdot 4^3 - 9 \cdot 4^2 - 3 = 2 \cdot 64 - 9 \cdot 16 - 3 = 128 - 144 - 3 = -19$

Відповідь: $\max\limits_{[-1;4]} f(x) = f(0) = -3;$

$\min\limits_{[-1;4]} f(x) = f(3) = -30.$

4) $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$, $[-3; 0]$.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+8}{x-1}\right)' = \frac{(x^2+8)'(x-1) - (x^2+8)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - (x^2+8)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 8}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 8}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2} = 0$$

$(x-1)^2 \neq 0$ $\quad$ $x^2 - 2x - 8 = 0$

$x - 1 \neq 0$ $\quad$ $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$

$x \neq 1$ $\quad$ $\sqrt{D} = \sqrt{36} = 6$

$$x_1 = \frac{2-6}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{2+6}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$$ – не належить проміжку.

$$f(-3) = \frac{(-3)^2+8}{-3-1} = \frac{9+8}{-4} = -\frac{17}{4} = -4{,}25$$

$$f(-2) = \frac{(-2)^2+8}{-2-1} = \frac{4+8}{-3} = \frac{12}{-3} = -4$$ – найбільше значення.

$$f(0) = \frac{0^2+8}{0-1} = \frac{8}{-1} = -8$$ – найменше значення.

Відповідь: $\max\limits_{[-3;0]} f(x) = f(-2) = -4$;

$\min\limits_{[-3;0]} f(x) = f(0) = -8$.

Домашнє завдання: розв'язати задачі (в зошиті):

1) **.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $g(x)$ на заданому проміжку:

1) $g(x) = -2x + 3$, $[0; 3]$;

2) $g(x) = x^2 - 4x$, $[0; 1]$;

2) **0.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на заданому проміжку:

1) $f(x) = 8x^2 - x^4$, $x \in [-1; 2]$;

2) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 5$, $x \in [0; 4]$;

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com