**08.09.2023**
**Група 35**
**Алгебра**
**Урок 1-2**
**Тема:** Первісна
**Мета:**

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати знання з фізики під час розв'язування прикладних задач; формувати уяву про процеси у природі;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення фізики та астрономії; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення фізики та астрономії, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

**Матеріали до уроку:**

Ви знаєте, що знаходження похідної заданої функції називають диференціюванням. Обернену операцію, тобто знаходження функції за її похідною, називають **інтегруванням.**

**Означення. Функцію $F$ називають первісною функцією (або коротко первісною) функції $f$ на проміжку $I$, якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність**

$$F'(x) = f(x).$$

Наприклад, функція $F(x) = x^2$ є первісною функції $f(x) = 2x$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$, оскільки на $\mathbb{R}$ виконується рівність $(x^2)' = 2x$.

Часто в задачах, пов'язаних з первісною функції, проміжок $I$ опускають. У таких випадках вважають, що $I = (-\infty; +\infty)$. Так, функція $F(x) = \cos x$ є первісною функції $f(x) = -\sin x$, оскільки виконується рівність $(\cos x)' = -\sin x$.

Наведемо ще один приклад. Функція $F(x) = \sqrt{x}$ є первісною функції $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на проміжку $(0; +\infty)$, оскільки на цьому проміжку виконується рівність $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Розглянемо функції $y = x^2 + 1$ і $y = x^2 - 2$. Кожна з них має одну й ту саму похідну $y = 2x$. Таким чином, обидві функції $y = x^2 + 1$ і $y = x^2 - 2$ є первісними функції $y = 2x$. Зрозуміло, що кожна з функцій виду $y = x^2 + C$, де $C$ — довільне число, є первісною функції $y = 2x$. Отже, задача знаходження первісної має безліч розв'язків.

Мета інтегрування полягає в тому, щоб для заданої функції знайти всі її первісні на заданому проміжку.

Як пов'язані між собою всі первісні даної функції, указує така теорема.

**Теорема 9.1 (основна властивість первісної).** ***Якщо функція $F$ є первісною функції $f$ на проміжку $I$ та $C$ — довільне число, то функція***

$$y = F(x) + C$$

***також є первісною функції $f$ на проміжку $I$.***

***Будь-яку первісну функції $f$ на проміжку $I$ можна подати у вигляді $y = F(x) + C$, де $C$ — деяке число.***

Якщо функція $F$ є первісною функції $f$ на проміжку $I$, то запис $F(x) + C$, де $C$ — довільне число, називають **загальним виглядом первісних** функції $f$ на проміжку $I$.

З основної властивості первісної випливає, що графіки будь-яких двох первісних даної функції можна отримати один з одного паралельним перенесенням уздовж осі ординат (рис. 9.1).

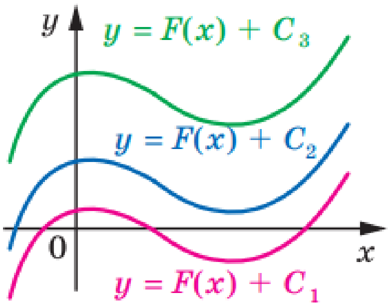


**Рис. 9.1**

Сукупність усіх первісних функції $y = f(x)$ на проміжку $I$ називають її **невизначеним інтегралом** і позначають

$$\int f(x)dx$$

(читають: «інтеграл еф від ікс де ікс»).

Під час розв'язування задач на первісну зручно користуватися таблицею, наведеною на форзаці 3.

## ТАБЛИЦЯ ПЕРВІСНИХ ФУНКЦІЙ

| Функция $f$ | Загальний вигляд первісних функцій $f$ |
|---|---|
| $k$ (стала) | $kx+c$ |
| $x^n$, $n\neq-1$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\mathrm{In}\lvert x\rvert+c$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}+c$ |
| $\sin x$ | $-\cos x$ |
| $\cos x$ | $\sin x+c$ |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\mathrm{tg}\, x+c$ |
| $\frac{1}{\sin^2 x}$ | $-\mathrm{ctg}\, x+c$ |
| $a^x$ | $\frac{a^x}{\mathrm{In}a}+c$ |
| $e^x$ | $e^x+c$ |

## ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

**Приклад 1.** Перевірте, чи є функція $F(x)=2\sqrt{x}$ первісною для функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ на проміжку $(0;+\infty)$.

**Розв'язання**

$F'(x)=\left(2\sqrt{x}\right)'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, це й означає, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

**Коментар**

За означенням функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, якщо $F'(x)=f(x)$.

**Приклад 2.** Знайдіть:

1) одну з первісних для функції $f(x)=x^4$ на $\boldsymbol{R}$;

2) усі первісні для функції $f(x)=x^4$;

3*) $\int x^4 dx$.

**Розв'язання**

1) Однією з первісних для функції $f(x)=x^4$ на множині $\boldsymbol{R}$ є функція $F(x)=\frac{x^5}{5}$, оскільки

$$F'(x)=\left(\frac{x^5}{5}\right)'=\frac{1}{5}\cdot 5x^4=x^4.$$

2) За основною властивістю первісних усі первісні для функції $f(x)=x^4$ можна записати у вигляді $\frac{x^5}{5}+C$, де $C$ — довільна стала.

3*) $\int x^4 dx=\frac{x^5}{5}+C$, де $C$ — довільна стала.

**Коментар**

1) Первісну для функції $f(x)=x^4$ спробуємо знайти підбором. В процесі можна міркувати так: щоб після знаходження похідної одержати $x^4$, потрібно брати похідну від $x^5$. Але $(x^5)'=5x^4$, щоб похідна дорівнювала $x^4$, достатньо поставити перед функцією $x^5$ коефіцієнт $\frac{1}{5}$.

Простіше використати формулу з п. 5 табл. 10 (таблиці первісних): *однією з первісних для функції* $x^{\alpha}$ *є функція*

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

2) *Якщо ми знаємо одну первісну* $F(x)$ *для функції* $f(x)$, *то* за основною властивістю первісних *будь-яку первісну для функції* $f(x)$ *можна записати у вигляді* $F(x)+C$, де $C$ — довільна стала.

3) За означенням $\int f(x)dx=F(x)+C$, тобто невизначений інтеграл $\int f(x)dx$ — це спеціальне позначення загального виду всіх первісних для даної функції $f(x)$ (який ми вже знайшли в п. 2 розв'язання).

**Приклад 3.** Для функції $f(x)=\sqrt{x}$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M(9;10)$.

**Розв'язання**

$D(f)=[0;+\infty)$. Тоді $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.

Загальний вигляд усіх первісних для функції $f(x)$ такий:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$$

За умовою графік первісної проходить через точку $M(9;10)$, отже, при $x=9$ одержуємо

$$\frac{2}{3}\cdot 9\sqrt{9}+C=10.$$

Звідси $C=-8$. Тоді шукана первісна:

$$\frac{2}{3}x\sqrt{x}-8.$$

**Коментар**

Спочатку запишемо загальний вигляд первісних для заданої функції: $F(x)+C$. Потім використаємо те, що графік одержаної функції проходить через точку $M(9;10)$, отже, при $x=9$ значення функції $F(x)+C$ дорівнює 10.

Щоб знайти первісну для функції $f(x)=\sqrt{x}$, урахуємо, що її область визначення $x\geqslant 0$. Тоді цю функцію можна записати так: $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ і використати формулу знаходження первісної для функції $x^{\alpha}$, а саме: $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$.

**Домашнє завдання:** розв'зати задачі (в зошиті):

1) **2** Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на $(-\infty; +\infty)$ **(8.5–8.6):**

**8.5.** 1) $F(x) = x^4 - 3x + 1$, $f(x) = 4x^3 - 3$;

2) $F(x) = x\cos x$, $f(x) = \cos x - x\sin x$.

2) Знайдіть загальний вигляд первісних для функції **(9.7–9.10):**

**9.7.** 1) $f(x) = 10x^9$; 2) $f(x) = \dfrac{5}{\cos^2 x}$;

3) $f(x) = 14x^6$; 4) $f(x) = 6x^{-3}$.

**Зворотній зв'язок:**

**E-mail** t.anastasia.igorivna@gmail.com