08.09.2022
Група Б-1
Вища математика
Урок 7-8
Тема: Системи лінійних рівнянь (лекція)

Матеріали до уроку:

1) Основні поняття та означення.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь(***СЛАР***) відіграють важливу роль у математиці, оскільки до них зводиться велика кількість задач лінійної алгебри, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики тощо, та областей фізики й техніки, де застосовуються ці математичні теорії.

Рівняння називається лінійним, якщо воно містить невідомі величини x_1 , x_2 ,..., x_n тільки в першому степені і не містить їх добутки.

Це рівняння такого вигляду: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, де $a_1, a_2, \cdots, a_n, b$ – довільні дійсні числа.

Розглянемо систему m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Це система *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими, де

$x_1, \ x_2, \ldots, x_n$є невідомими,

$a_{11}, \ a_{12}, \ldots, a_{mn}$є коефіцієнтами системи,

$b_1, \ b_2, \ldots, b_m$ — вільними членами

2) Векторний запис.

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь можна записати у вигляді, де кожна невідома є ваговим коефіцієнтом в лінійній комбінації вектор-стовпців.

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Що дозволяє переформулювати задачу в термінах векторного простору: рівняння має розв'язок тоді і тільки тоді, коли лінійна комбінація (лінійна оболонка) векторів лівої частини включає вектор правої частини.

3) Матричний запис

Векторна форма еквівалентна матричній формі запису

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

де A — матриця $m \times n$, x — вектор з n компонент, b — вектор з m компонент.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Число векторів в базисі лінійної оболонки векторів є рангом матриці.

4) Множина розв'язків

Розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь є будь-яка сукупність дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, яка при підстановці кожне рівняння системи перетворює його в тотожність.

Якщо система має хоча б один розв'язок, то вона називається ***сумісною***, і ***несумісною***, якщо не має жодного. Відповідь на питання сумісності системи дає теорема Кронекера-Капеллі.

Сумісна система називається ***визначеною***, якщо вона має єдиний розв'язок, і ***невизначеною***, якщо вона має безліч розв'язків. В останньому випадку кожен її розв'язок називають ***частковим розв'язком системи***. Сукупність усіх часткових розв'язків називають ***загальним розв'язком системи***.

Якщо всі вільні члени $b_i = 0$, система лінійних алгебраїчних рівнянь називається ***однорідною***. Однорідна система має очевидний розв'язок, у якому всі $x_i = 0$. Цей розв'язок заведено називати ***тривіальним***. Відмінні від тривіального розв'язки існують тільки тоді, коли матриця A вироджена.

5) Еквівалентні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь називаються ***еквівалентними,*** якщо множина їхніх розв'язків збігається, тобто будь-який розв'язок однієї системи є водночас розв'язком іншої, і навпаки.

Систему, еквівалентну даній, можна отримати, зокрема, замінивши одне з рівнянь на це ж рівняння, помножене на будь-яке відмінне від нуля число. Еквівалентну систему можна отримати також, замінивши одне з рівнянь сумою цього рівняння з іншим рівнянням системи. Загалом, заміна рівняння системи на лінійну комбінацію рівнянь дає систему, еквівалентну початковій.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

еквівалентна системі $CA\mathbf{x} = C\mathbf{b}$, де C - невироджена матриця.

Зокрема, якщо сама матриця A - невироджена, і для неї існує обернена матриця A^{-1}, то розв'язок системи рівнянь можна формально записати у вигляді

$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

6) Методи розв'язання

- Метод послідовного виключення. Найпростішим, хоча важким для практичних застосувань, методом розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь є метод послідовного виключення невідомих. Суть його в тому, що із першого рівняння змінна x_1 виражається через інші змінні, й підставляється в усі інші рівняння. Це можна зробити, якщо коефіцієнт a_{11} відмінний від нуля. У випадку, якщо він нульовий, можна вибрати інше рівняння, оскільки перестановка рівнянь у системі дає еквівалентну систему. В результаті утворюється нова система рівнянь, в якій рівнянь на одне менше. З цією системою рівнянь можна поступити так само, отримуючи ще меншу систему рівнянь. Продовжуючи так, отримують одне лінійне рівняння, з якого можна визначити одну із змінних, а інші, виключені, виразити через неї.

- Метод Гауса — метод, найчастіше застосовуваний при ручному розв'язку СЛАР.

- Метод Гауса-Жордана - модифікація методу Гауса.

- Метод Крамера (за формулами Крамера) — чисто теоретичний метод, непридатний до практичного використання через обчислювальну складність і малу точність, оскільки вимагає обчислення визначників, а тільки в одному визначнику $n!$ доданків. Метод Крамера може застосовуватися для матриць 2×2, або, щонайбільше, 3×3.

- Матричний метод (за допомогою оберненої матриці) - певна теоретична абстракція всіх інших точних методів.

Домашнє завдання:

Зробити конспект

Зворотній зв`язок:

vitasergiivna1992@gmail.com

!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.