

07.11.2023

Група 23

Математика (алгебра)

Урок 13

Тема: Показникові рівняння

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

**Матеріали до уроку:**

$$\begin{aligned} \text{Розглянемо рівняння } 2^x &= 8, \\ 3^x \cdot 3^{x-1} &= 4, \\ 0,3^{x-4} &= 0,3^{x^2}. \end{aligned}$$

У цих рівняннях змінна міститься тільки в показнику степеня. Наведені рівняння є прикладами показникових рівнянь.

**Теорема 2.1.** При  $a > 0$  і  $a \neq 1$  рівність  $a^{x_1} = a^{x_2}$  виконується тоді й тільки тоді, коли  $x_1 = x_2$ .

*Доведення.* Очевидно, що коли  $x_1 = x_2$ , то  $a^{x_1} = a^{x_2}$ .

Доведемо, що з рівності  $a^{x_1} = a^{x_2}$  випливає рівність  $x_1 = x_2$ .

Припустимо, що  $x_1 \neq x_2$ , тобто  $x_1 < x_2$  або  $x_1 > x_2$ . Нехай, наприклад,  $x_1 < x_2$ .

Розглянемо показникову функцію  $y = a^x$ . Вона є або зростаючою, або спадною. Тоді з нерівності  $x_1 < x_2$  випливає, що  $a^{x_1} < a^{x_2}$  (при  $a > 1$ ) або  $a^{x_1} > a^{x_2}$  (при  $0 < a < 1$ ). Проте за умовою виконується рівність  $a^{x_1} = a^{x_2}$ . Отримали суперечність.

Аналогічно, розглядаючи випадок, коли  $x_1 > x_2$ , можна отримати суперечність. Отже,  $x_1 = x_2$ . ◀

**Наслідок.** Якщо  $a > 0$  і  $a \neq 1$ , то рівняння

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = g(x).$$

Розглянемо приклади розв'язування показникових рівнянь.

**Задача 1.** Розв'яжіть рівняння  $2^x = 8$ .

*Розв'язання.* Подамо кожен із членів рівняння у вигляді степеня з основою 2. Маємо:

$$2^x = 2^3.$$

Звідси  $x = 3$ .

*Відповідь:* 3. ◀

**Задача 2.** Розв'яжіть рівняння  $3^{2x+1} + 9^x = 36$ .

*Розв'язання.* Маємо:  $3^{2x+1} + (3^2)^x = 36$ ;  $3^{2x+1} + 3^{2x} = 36$ .

Винесемо множник  $3^{2x}$  за дужки:  $3^{2x}(3^1 + 1) = 36$ .

Далі отримуємо:  $3^{2x} \cdot 4 = 36$ ;  $3^{2x} = 9$ ;  $3^{2x} = 3^2$ ;  $2x = 2$ ;  $x = 1$ .

*Відповідь:* 1. ◀

**Задача 3.** Розв'яжіть рівняння  $25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$ .

*Розв'язання.* Оскільки  $25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2$ , то дане рівняння зручно розв'язувати методом заміни змінної.

Нехай  $5^x = t$ . Тоді задане рівняння можна переписати так:

$$t^2 + 4t - 5 = 0.$$

Звідси  $t = 1$  або  $t = -5$ .

Якщо  $t = 1$ , то  $5^x = 1$ . Звідси  $5^x = 5^0$ ;  $x = 0$ .

Якщо  $t = -5$ , то  $5^x = -5$ . Оскільки  $5^x > 0$  при будь-якому  $x$ , то рівняння  $5^x = -5$  не має коренів.

*Відповідь:* 0. ◀

**Задача 4.** Розв'яжіть рівняння  $9 \cdot 5^x = 25 \cdot 3^x$ .

*Розв'язання.* Маємо:  $3^2 \cdot 5^x = 5^2 \cdot 3^x$ . Звідси  $\frac{5^x}{3^x} = \frac{5^2}{3^2}$ ;  $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^2$ ;

$x = 2$ .

*Відповідь:* 2. ◀

**Домашнє завдання:** розв'язати задачі (в зошиті):

1)

Розв'яжіть рівняння:

1)  $5^x = 625$ ;      4)  $27^x = 81$ ;

2)  $11^{4x-3} = 11^{8x}$ ;    5)  $\left(\frac{49}{81}\right)^{x-6} = \left(\frac{9}{7}\right)^{x+4}$ ;

3)  $19^{x^2-4x-21} = 1$ ;    6)  $(3^{x-2})^{x-4} = \frac{1}{3}$ ;

**Зворотній зв'язок:**

**E-mail** [t.anastasia.igorivna@gmail.com](mailto:t.anastasia.igorivna@gmail.com)