06.10.2023
Група Б-1
Вища матем
Урок 35-36
Тема: Векторний і мішаний добутки векторів
Мета:
Навчальна – Формування понять векторний добуток і мішаний добуток векторів; вивчення способів використання даних понять
Розвивальна – розвивати просторову уяву, вміння проводити аналогії, порівняння;
Виховна – виховувати акуратність, зацікавленість у пізнанні нового.

Матеріали до уроку:

Означення. *Векторним добутком* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що позначається як $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ і задовольняє умовам:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів (рис. 1.2).

Векторний добуток двох векторів $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, які задані в координатній формі, обчислюється за формулою

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \qquad (1.8.10)$$

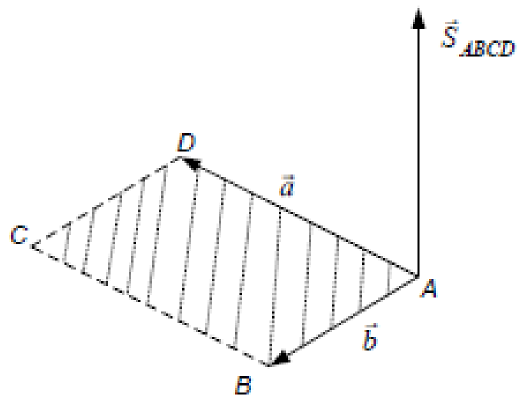

Рис. 1.2 - Геометричний зміст векторного добутку векторів

Приклад 1.8.5. Знайти векторний добуток векторів: $\vec{a} = \vec{j} - 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

Розв'язання. За формулою (1.8.10):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}.$$

Приклад 1.8.6. Знайти площу трикутника ABC з вершинами $A(1;1;-1)$, $B(1;2;3)$ і $C(2;1;2)$.

Розв'язання. Розглянемо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, що мають спільну вершину A: $\overrightarrow{AB}=(0;1;4)$ і $\overrightarrow{AC}=(1;0;3)$. Тоді площу трикутника можна знайти за формулою $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Знайдемо

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=3\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k},$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{26}.$$

Тоді площа трикутника $S_{ABC}=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

Означення. Якщо вектор $\vec{a}$ помножити векторно на $\vec{b}$ та векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$ помножити скалярно на $\vec{c}$, то в результаті отримаємо число, яке називається *мішаним добутком* $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. При цьому справедлива рівність $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

Мішаний добуток трьох векторів $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ і $\vec{c}(x_3;y_3;z_3)$, які задані в координатній формі, обчислюється за формулою

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}. \qquad (1.8.11)$$

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Обчислити мішаний добуток $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, якщо $\vec{a}=\{1;-1;3\}$, $\vec{b}=\{-2;2;1\}$, $\vec{c}=\{3-2;1;4\}$.

Розв'язання. Згідно з формулою (3.12):

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ -2 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix}=7.$$

Приклад 2 Установити, чи компланарні вектори:

1) $\vec{a}=\{2;-3;1\}$, $\vec{b}=\{1;-1;3\}$, $\vec{c}=\{1;9;-11\}$,

2) $\vec{a}=\{3;-2;1\}$, $\vec{b}=\{2;1;2\}$, $\vec{c}=\{3;-1;-2\}$.

Розв'язання.

1) $$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 9 & -11\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -9 & -11\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & -9\end{vmatrix}=0.$$

Отже, вектори компланарні, оскільки їх мішаний добуток дорівнює нулю.

2) $$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-26.$$

Таким чином, вектори не компланарні, оскільки їх мішаний добуток відмінний від нуля.

Домашнє завдання:

1. Знайти векторний добуток векторів

   а) $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}, \quad \overline{b} = \overline{i} - \overline{j} - \overline{k}.$

   б) $\overline{a} = -2\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k}, \quad \overline{b} = 3\overline{i} + 2\overline{k}.$

2. Обчислити мішаний добуток векторів

   $\overline{a} = (1;1;-2), \quad \overline{b} = (-2;-5;3), \quad \overline{c} = (-1;0;2).$

Зворотній зв'язок
E-mail **vitasergiivna1992@gmail.com**