06.09.2023
Група 34
Алгебра
Урок 1-2
Тема: Первісна
Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати знання з фізики під час розв'язування прикладних задач; формувати уяву про процеси у природі;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення фізики та астрономії; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення фізики та астрономії, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

Ви знаєте, що знаходження похідної заданої функції називають диференціюванням. Обернену операцію, тобто знаходження функції за її похідною, називають **інтегруванням.**

Означення. Функцію F називають первісною функцією (або коротко первісною) функції f на проміжку I, якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність

$$F'(x) = f(x).$$

Наприклад, функція $F(x) = x^2$ є первісною функції $f(x) = 2x$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$, оскільки на $\mathbb{R}$ виконується рівність $(x^2)' = 2x$.

Часто в задачах, пов'язаних з первісною функції, проміжок I опускають. У таких випадках вважають, що $I = (-\infty; +\infty)$. Так, функція $F(x) = \cos x$ є первісною функції $f(x) = -\sin x$, оскільки виконується рівність $(\cos x)' = -\sin x$.

Наведемо ще один приклад. Функція $F(x) = \sqrt{x}$ є первісною функції $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на проміжку $(0; +\infty)$, оскільки на цьому проміжку виконується рівність $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Розглянемо функції $y = x^2 + 1$ і $y = x^2 - 2$. Кожна з них має одну й ту саму похідну $y = 2x$. Таким чином, обидві функції $y = x^2 + 1$ і $y = x^2 - 2$ є первісними функції $y = 2x$. Зрозуміло, що кожна з функцій виду $y = x^2 + C$, де C — довільне число, є первісною функції $y = 2x$. Отже, задача знаходження первісної має безліч розв'язків.

Мета інтегрування полягає в тому, щоб для заданої функції знайти всі її первісні на заданому проміжку.

Як пов'язані між собою всі первісні даної функції, указує така теорема.

Теорема 9.1 (основна властивість первісної). ***Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та C — довільне число, то функція***

$$y = F(x) + C$$

також є первісною функції f на проміжку I.

Будь-яку первісну функції f на проміжку I можна подати у вигляді $y = F(x) + C$, де C — деяке число.

Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I, то запис $F(x) + C$, де C — довільне число, називають **загальним виглядом первісних** функції f на проміжку I.

З основної властивості первісної випливає, що графіки будь-яких двох первісних даної функції можна отримати один з одного паралельним перенесенням уздовж осі ординат (рис. 9.1).

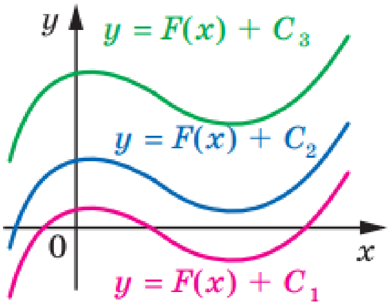

Рис. 9.1

Сукупність усіх первісних функції $y = f(x)$ на проміжку I називають її **невизначеним інтегралом** і позначають

$$\int f(x)dx$$

(читають: «інтеграл еф від ікс де ікс»).

Під час розв'язування задач на первісну зручно користуватися таблицею, наведеною на форзаці 3.

ТАБЛИЦЯ ПЕРВІСНИХ ФУНКЦІЙ

Функция f	Загальний вигляд первісних функцій f
k (стала)	$kx+c$
x^n, $n\neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$\frac{1}{x}$	$\mathrm{In}\,|x|+c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x+c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x+c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x+c$
a^x	$\frac{a^x}{\mathrm{In} a}+c$
e^x	e^x+c

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Перевірте, чи є функція $F(x)=2\sqrt{x}$ первісною для функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ на проміжку $(0;+\infty)$.

Розв'язання

$F'(x)=\left(2\sqrt{x}\right)'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, це й означає, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Коментар

За означенням функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, якщо $F'(x)=f(x)$.

Приклад 2. Знайдіть:

1) одну з первісних для функції $f(x)=x^4$ на $\boldsymbol{R}$;

2) усі первісні для функції $f(x)=x^4$;

3*) $\int x^4 dx$.

Розв'язання

1) ▶ Однією з первісних для функції $f(x)=x^4$ на множині $\boldsymbol{R}$ є функція $F(x)=\frac{x^5}{5}$, оскільки

$$F'(x)=\left(\frac{x^5}{5}\right)'=\frac{1}{5}\cdot 5x^4=x^4.$$ ■

2) ▶ За основною властивістю первісних усі первісні для функції $f(x)=x^4$ можна записати у вигляді $\frac{x^5}{5}+C$, де C — довільна стала. ■

3*) ▶ $\int x^4 dx=\frac{x^5}{5}+C$, де C — довільна стала. ■

Коментар

1) Первісну для функції $f(x)=x^4$ спробуємо знайти підбором. В процесі можна міркувати так: щоб після знаходження похідної одержати x^4, потрібно брати похідну від x^5. Але $(x^5)'=5x^4$, щоб похідна дорівнювала x^4, достатньо поставити перед функцією x^5 коефіцієнт $\frac{1}{5}$.

Простіше використати формулу з п. 5 табл. 10 (таблиці первісних): *однією з первісних для функції x^α є функція*

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

2) *Якщо ми знаємо одну первісну $F(x)$ для функції $f(x)$, то* за основною властивістю первісних *будь-яку первісну для функції $f(x)$ можна записати у вигляді $F(x)+C$*, де C — довільна стала.

3) За означенням $\int f(x)dx=F(x)+C$, тобто невизначений інтеграл $\int f(x)dx$ — це спеціальне позначення загального виду всіх первісних для даної функції $f(x)$ (який ми вже знайшли в п. 2 розв'язання).

Приклад 3. Для функції $f(x)=\sqrt{x}$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M(9;10)$.

Розв'язання

▶ $D(f)=[0;+\infty)$. Тоді $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.

Загальний вигляд усіх первісних для функції $f(x)$ такий:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$$

За умовою графік первісної проходить через точку $M(9;10)$, отже, при $x=9$ одержуємо

$$\frac{2}{3}\cdot 9\sqrt{9}+C=10.$$

Звідси $C=-8$. Тоді шукана первісна:

$$\frac{2}{3}x\sqrt{x}-8.$$ ■

Коментар

Спочатку запишемо загальний вигляд первісних для заданої функції: $F(x)+C$. Потім використаємо те, що графік одержаної функції проходить через точку $M(9;10)$, отже, при $x=9$ значення функції $F(x)+C$ дорівнює 10.

Щоб знайти первісну для функції $f(x)=\sqrt{x}$, урахуємо, що її область визначення $x\geqslant 0$. Тоді цю функцію можна записати так: $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ і використати формулу знаходження первісної для функції x^α, а саме: $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$.

Домашнє завдання: розв’зати задачі (в зошиті):

1) Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на $(-\infty; +\infty)$ **(8.5–8.6):**

8.5. 1) $F(x) = x^4 - 3x + 1$, $f(x) = 4x^3 - 3$;

2) $F(x) = x\cos x$, $f(x) = \cos x - x\sin x$.

2) Знайдіть загальний вигляд первісних для функції **(9.7–9.10):**

9.7. 1) $f(x) = 10x^9$; 2) $f(x) = \dfrac{5}{\cos^2 x}$;

3) $f(x) = 14x^6$; 4) $f(x) = 6x^{-3}$.

Зворотній зв'язок:

E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com