Група Б-1
Вища математика
Урок 3-4
Тема: Визначники, обернена матриця
Мета: познайомити з різними видами визначників та їх практичним застосуванням; навчити перетворювати матриці на обернені; розвинути увагу та стійкість до поставлених задач, розвинути навички математичного мовлення.

Матеріали до уроку:

Визначники

Визначник – числова характеристика квадратної матриці.

Визначником другого порядку називається вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

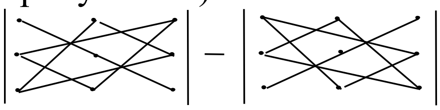
Визначником третього порядку називається вираз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 10$$

Для запам’ятовування правила обчислення визначника третього порядку існує схема (правило трикутників):



$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot (-5) + 6 \cdot (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 0 -$$

$$- 6 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \cdot (-5) = -129$$

Квадратна матриця називається **неособливою (невиродженою),** якщо її визначник не дорівнює нулю, і **особливою (виродженою)**, якщо її визначник дорівнює нулю.

Властивості визначників

Властивість 1. Визначник не змінюється в результаті транспонування.
(З властивості 1 випливає, що будь-яке твердження, що справджується для рядків визначника, справджується і для його стовпців, і навпаки.)

Властивість 2. Якщо один із рядків визначника складається лише з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.

Властивість 3. Якщо поміняти місцями будь-які два рядки визначника, то його знак зміниться на протилежний.

Властивість 4. Визначник, що має два однакові рядки, дорівнює нулю.

Властивість 5. Якщо елементи будь-якого рядка визначника помножити на стале число *C*, то й визначник помножиться на *C*.
(З цієї властивості випливає, що спільний множник елементів рядка можна виносити за знак визначника.)

Властивість 6. Визначник, що має два пропорційні рядки, дорівнює нулю.

Властивість 7. Якщо всі елементи будь-якого рядка визначника можна подати у вигляді суми двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких елементами цього рядка будуть відповідно перший доданок у першому визначнику і другий доданок у другому визначнику, а решта елементів будуть ті самі, що й у початковому визначнику.

Властивість 8. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка додати відповідні елементи довільного іншого рядка, попередньо помножені не деяке число

Мінори та алгебраїчні доповнення

Нехай визначник має n рядків і n стовпців. **Мінором k-го порядку** $k \in [1;\ n-1]$ називається визначник, утворений з елементів, розміщених на перетині будь-яких k рядків і k стовпців визначника. Зрозуміло, що мінор першого порядку — це будь-який елемент визначника.	Утворити кілька мінорів другого і один мінор третього порядку такого визначника: $$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$ $$M_2^1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ M_2^2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},\ M_2^3 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \ldots,$$ $$M_3^1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 2 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$ Мінори M_2^1, M_2^2, M_2^3 другого порядку утворюються з елементів, розміщених на перетині першого, другого рядків; першого, другого стовпців; третього, четвертого рядків; першого, третього стовпців; другого, четвертого рядків; третього, четвертого стовпців. Мінор M_3^1 третього порядку утворюється з елементів, розміщених на перетині другого, третього, четвертого рядків і першого, третього, четвертого стовпців. Верхній індекс означає нумерацію мінорів; нижній індекс — порядок мінора.
Доповняльним мінором для мінора k-го порядку називається такий мінор, який лишається у визначнику після викреслювання тих k рядків і тих k стовпців, на перетині яких містяться елементи, що утворили мінор k-го порядку.	Утворити доповняльний мінор другого порядку. Для визначника Δ запишемо мінор другого порядку: $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>$$M_2^1 = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$
Цей мінор утворено з елементів, які містяться на перетині першого і третього рядків та другого і четвертого стовпців. Викреслимо ці рядки та стовпці з визначника Δ, дістанемо $M_{2д}^1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ — мінор, доповняльний до мінора другого порядку M_2^1:
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Алгебраїчне доповнення мінора — визначник, що складається з елементів, котрі не належать тим рядкам і тим стовпцям визначника, з яких утворено мінор, і береться зі знаком $(-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k}$, де i_1 i_2, ..., i_k, j_1, j_2, ..., j_k, — індекси відповідно тих рядків і тих стовпців, які брали участь в утворенні мінора.</td>
<td>Знайти алгебраїчні доповнення мінорів матриці
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5,$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10,$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4,$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12,$$
$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$
$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$
$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$
$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2" align="center">Обернена матриця</td>
</tr>
</table>

Матриця A^{-1} називається **оберненою матрицею до квадратної невиродженої матриці** А, якщо виконується співвідношення: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{mn}- алгебраїчні доповнення мінорів матриці A.

Знайти матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Обчислимо:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix}=15-10=$$

. $\Delta(A)\neq 0$ — обернена матриця існує.

$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=5$, $A_{12}=-\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=10$,

$A_{13}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=0$, $A_{21}=-\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=4$,

$A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=12$, $A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1$,

$A_{31}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$, $A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-3$,

$A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1$.

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Завдання для самоперевірки

1) Матриця A^{-1} називається оберненою до невиродженої матриці A, якщо ...
2) Рангом матриці називається ...
3) Мінором k-го порядку називається ...
4) Алгебраїчним доповненням називається ..

№1. Обчислити

№2. Знайти визначники

а) $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0{,}5 & -0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}6 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

№3. Знайти матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Домашнє завдання:

Зробити конспект

Виконати вправу

Зворотній зв`язок:

vitasergiivna1992@gmail.com

!!!! у повідомленні з д/з не забуваєм вказувати прізвище, групу і дату уроку.