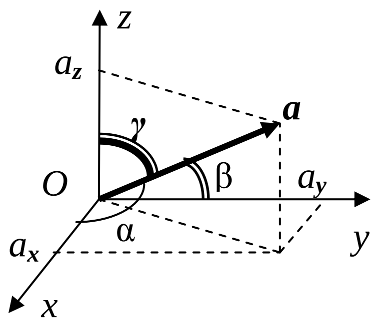
04.10.2023
Група Б-1
Вища матем.
Урок №31-32
Тема: Властивості лінійних операцій над векторами.
Мета:
Навчальна – удосконалити навички розв'язання задач лінійної геометрії, закріпити знання про скалярний добуток, розробити етапи виконання поставленої задачі;
Розвивальна – розвивати логічне мислення, уміння проводити аналіз явищ, їх синтез, групувати й узагальнювати їх; розвивати спостережливість та уміння робити висновки;
Виховна мета – формувати науковий світогляд учнів, сприяти всебічному вихованню учнів; розширити кругозір учнів щодо оцінки діяльності.

Матеріали для уроку:

Розглянемо основні формули з курсу лінійної геометрії.

Вектори у декартовій системі координат



$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k} = (a_x ; a_y ; a_z) \ ,$$

$$\overline{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A) \ .$$

Довжина вектора $\qquad |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,.$ **(3.3)**

Напрямні косинуси $\qquad \cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\bar{a}|}\ , \quad \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\bar{a}|}\ , \quad \cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\bar{a}|}\,.$ **(3.4)**

Дії над векторами, заданими у координатній формі

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x ; a_y + b_y ; a_z + b_z)\ , \qquad \textbf{(3.1)}$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_x - b_x ; a_y - b_y ; a_z - b_z)\ , \qquad \textbf{(3.2)}$$

$$\lambda \bar{a} = (\lambda a_x ; \lambda a_y ; \lambda a_z)\ .$$

Умова колінеарності векторів $\qquad \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}\ .$

Повторити та доповнити
Скалярний добуток векторів

Добуток	Скалярний
Позначення	$\vec{a}\cdot\vec{b}$, $(\vec{a},\vec{b})$
Тип величини	Число
Означення	$\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$
Властивості	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ $\vec{a}\cdot\vec{a}=\lvert\vec{a}\rvert^2$
Добутки ортів	$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$ $\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0$
Обчислення в ДСК	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$
Основні задачі	довжина вектора $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ косинус кута між векторами $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$ проекція вектора на інший вектор $пр_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{b}\rvert}$ умова перпендикулярності $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Приклади задач:

Приклад 1 Обчислити довжину вектора $\vec{a}=\{6;\ 3;\ -2\}$ і його напрямні косинуси.

Розв'язання. Використовуючи формули (3.3), (3.4), одержимо

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{49}=7$; $\cos\alpha=\dfrac{6}{7}$; $\cos\beta=\dfrac{3}{7}$; $\cos\gamma=-\dfrac{2}{7}$.

Приклад 2 Вектор $\vec{a}$ утворює з координатними осями $0x$, $0y$, кути $\alpha=60^0$ і $\beta=120^0$. Обчислити його координати, якщо $\left|\vec{a}\right|=2$.

Розв'язання. За формулами (3.4): $a_{\vec{x}}=\left|\vec{a}\right|\cos\alpha=2\cdot\cos60^0=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$; $a_{\vec{y}}=\left|\vec{a}\right|\cos\beta=2\cdot\cos120^0=2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$. Використовуючи далі формулу (3.3), одержимо $4=1+1+a_z^2$; звідки $a_z=\pm\sqrt{2}$. Таким чином, $\vec{a}=\{1;\ -1;\ \sqrt{2}\}$, або $\vec{a}=\{1;\ -1;\ -\sqrt{2}\}$.

Приклад 5 Відомо, що $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$, Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Розв'язання. Розглянемо вектори $\vec{AB} = \vec{a}$ і $\vec{AD} = \vec{b}$ (рис. 3.8)

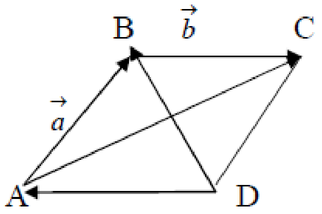


Рис.3.8

За правилом паралелограма $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC}$, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{DB}$.

Тоді $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{AC}|$.

Скористаємось властивістю діагоналей паралелограма:

$$|\vec{AC}|^2 + |\vec{BD}|^2 = 2\left(|\vec{AB}|^2 + |\vec{AD}|^2\right).$$

Враховуючи, що $|\vec{AC}| = |\vec{a} + \vec{b}| = 24$, $|\vec{AB}| = |\vec{a}| = 13$, $|\vec{AD}| = |\vec{b}| = 19$,

Приклад 7 Знайти орт вектора $a = \{6; -2; -3\}$.

Розв'язання. Відомо, що орт $\vec{a}^0$ вектора $\vec{a}$ має напрям вектора $\vec{a}$ і довжину, що дорівнює одиниці. Тому $\vec{a}^0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\dfrac{a_x}{|\vec{a}|}; \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}; \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}\right)$.

За формулою (3.3) $|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7$.

Отже, $\vec{a}^0 = \dfrac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \{\dfrac{6}{7}; \dfrac{2}{7}; -\dfrac{3}{7}\}$.

Приклад 8 Обчислити модулі суми і різниці векторів $\vec{a} = \{3; -5; 8\}$ і $\vec{b} = \{-1; 1; -4\}$.

Розв'язання. Знайдемо вектори $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, скориставшись формулами (3.1) і (3.2):

$\vec{a} + \vec{b} = \{3-1; -5+1; 8-4\} = \{2; -4; 4\}$, $\vec{a} - \vec{b} = \{3+1; -5-1; 8+4\} = \{4; -6; 12\}$.

Далі за формулою (3.3) матимемо:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4} = \sqrt{36} = 6; \quad |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 12} = \sqrt{196} = 14.$$

Домашнє завдання:

1. Відкрийте ссилку та виконайте задачі для самостійної робити (в кінці сторінки) http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/mod/resource/view.php?id=29519

Зворотній зв'язок:
E-mail: **vitasergiivna1992@gmail.com**