04.09.2023
Група 32
Геометрія
Урок 1-2
Тема: Об’єми тіл. Формули для обчислення об’єму призми і паралелепіпеда
Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати знання з фізики під час розв’язування прикладних задач; формувати уяву про процеси у природі;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення фізики та астрономії; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення фізики та астрономії, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

З такою величиною, як об’єм, ви часто стикаєтесь у повсякденному житті: об’єм пакета соку, об’єм скляної банки, показники споживання води або палива на лічильниках (рис. 22.1). З поняттям об’єму ви ознайомились у курсі математики 5 класу. Крім того, це поняття ви неодноразово використовували, наприклад, на уроках фізики та хімії.

Рис. 22.1

Вивчаючи планіметрію, ви часто стикалися з такою геометричною величиною, як площа фігури. Об’єм тіла в стереометрії є аналогом площі фігури в планіметрії. Побачити цю аналогію нескладно, якщо порівняти означення площі многокутника, вивчене вами у 8 класі, з таким означенням.

Означення. Об'ємом тіла називають додатну величину, яка має такі властивості:

1) **рівні тіла мають рівні об'єми;**
2) **якщо тіло складене з кількох інших тіл, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів цих тіл;**
3) **за одиницю виміру об'єму тіла беруть одиничний куб, тобто куб з ребром, яке дорівнює одиниці виміру довжини.**

Вивчення об'ємів тіл почнемо з многогранників.

Виміряти об'єм многогранника — це означає порівняти його об'єм з об'ємом одиничного куба. У результаті отримують числове значення об'єму даного многогранника. Це число показує, у скільки разів об'єм даного многогранника відрізняється від об'єму одиничного куба.

Покажемо, як, спираючись на означення, знайти об'єм, наприклад, прямокутного паралелепіпеда з ребрами 1 см, 1 см і 3 см (рис. 22.2).

Такий паралелепіпед можна розбити на три куби з ребром 1 см. Із властивості 2 об'єму випливає, що об'єм даного паралелепіпеда дорівнює трьом об'ємам куба з ребром 1 см (коротко записують: 3 см^3).

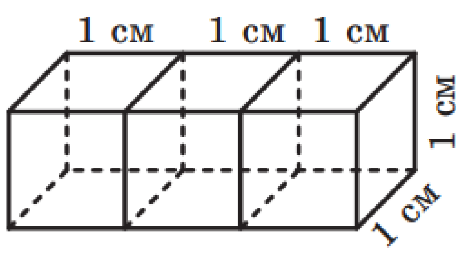


Рис. 22.2

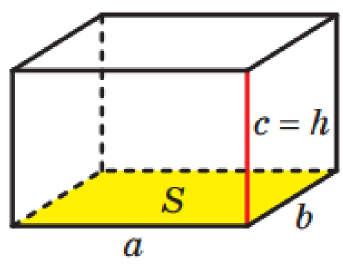


Рис. 22.3

Під час обчислення об'єму тіл зручно користуватися формулами, які дають змогу знаходити об'єм тіла за певними його елементами.

Зокрема, *якщо виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють a, b і c, то його об'єм V можна обчислити за формулою*

$$\boxed{V = abc}$$

Звернемо увагу, що добуток ab дорівнює площі S основи прямокутного паралелепіпеда, а ребро c є його висотою h (рис. 22.3). Тоді формулу об'єму прямокутного паралелепіпеда можна записати так:

Звернемо увагу, що добуток ab дорівнює площі S основи прямокутного паралелепіпеда, а ребро c є його висотою h (рис. 22.3). Тоді формулу об'єму прямокутного паралелепіпеда можна записати так:

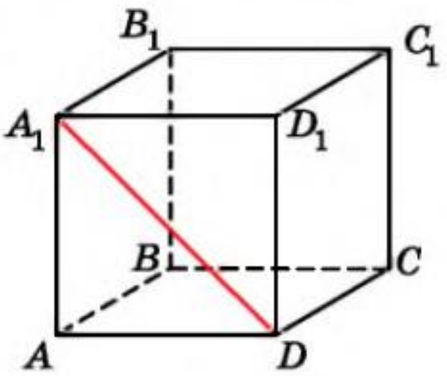
$$\boxed{V = Sh}$$

Цю формулу використовують також для обчислення об'єму призми.

Теорема 22.1. ***Об'єм V призми з висотою, що дорівнює h, і основою, площа якої дорівнює S, можна обчислити за формулою***

$$\boxed{V = Sh}$$

Задача 1. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 см і 8 см, а діагональ більшої за площею бічної грані дорівнює 10 см. Знайти об'єм паралелепіпеда.



Мал. 8.2

Розв'язання.

1) Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AB = 2$ см, $AD = 8$ см, $A_1D = 10$ см (мал. 8.2).

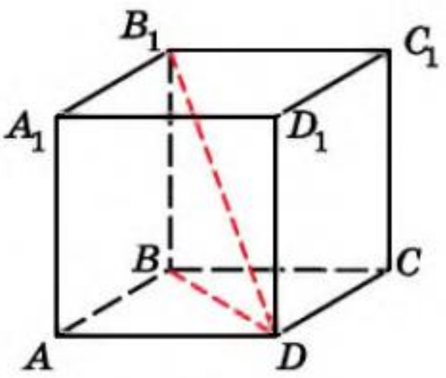
2) У $\triangle AA_1D$ ($\angle A = 90°$):

$AA_1 = \sqrt{A_1D^2 - AD^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см).

3) Маємо $V = AB \cdot AD \cdot AA_1 = 2 \cdot 8 \cdot 6 = 96$ (см^3).

Відповідь. 96 см^3.

Задача 2. Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат з діагоналлю 6 см. Знайти об'єм паралелепіпеда, якщо його діагональ нахилена до площини основи під кутом 60°.



Мал. 8.3

Розв'язання.

1) Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, у якого основа $ABCD$ – квадрат, $BD = 6$ см, $\angle B_1DB = 60°$ (мал. 8.3).

2) Площа основи $S = \frac{1}{2} \cdot 6^2 = 18$ (см²).

3) У $\triangle BB_1D$ ($\angle B = 90°$):

$BB_1 = BD\text{tg}\angle B_1DB = 6\text{tg}60° = 6\sqrt{3}$ (см), $h = 6\sqrt{3}$ см.

4) Тоді об'єм паралелепіпеда:

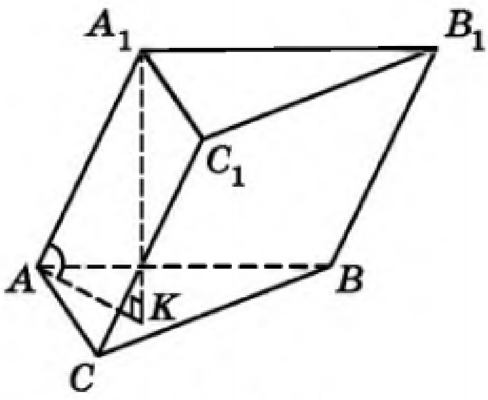
$$V = Sh = 18 \cdot 6\sqrt{3} = 108\sqrt{3} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. $108\sqrt{3}$ см³.

Задача 3. Основою похилої призми є правильний трикутник зі стороною 4 см. Бічне ребро призми дорівнює 6 см і нахилене до площини основи під кутом 30°. Знайти об'єм призми.

Розв'язання. 1) Нехай $ABCA_1B_1C_1$ – задана в умові призма, $\triangle ABC$ – правильний, $AB = 4$ см, $AA_1 = 6$ см, $A_1K = h$ – висота призми, $\angle A_1AK$ – кут нахилу бічного ребра до площини основи, $\angle A_1AK = 30°$ (мал. 8.7).

2) Площа основи $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, де $a = AB$ – сторона основи. Маємо $S = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ (см²).



Мал. 8.7

3) У $\triangle AA_1K$ ($\angle K = 90°$): $h = A_1K = \frac{AA_1}{2} = \frac{6}{2} = 3$ (см) (за властивістю катета, що лежить проти кута 30°).

4) Маємо $V = Sh = 4\sqrt{3} \cdot 3 = 12\sqrt{3}$ (см³).

Відповідь. $12\sqrt{3}$ см³.

Задача 4. Основою прямого паралелепіпеда є ромб зі стороною 8 см і гострим кутом 60°. Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює більшій діагоналі ромба. Знайти об'єм паралелепіпеда.

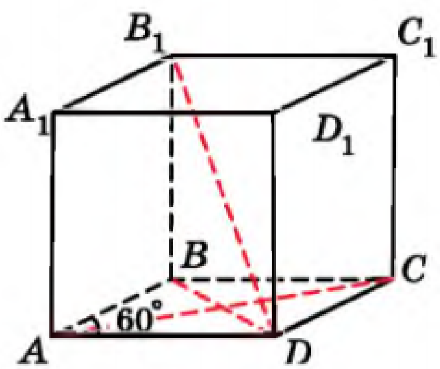
Розв'язання.

1) Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – заданий в умові паралелепіпед, $ABCD$ – ромб, $AB = 8$ см, $\angle BAD = 60°$ (мал. 8.8).

2) Площа основи:

$S = AB^2\sin\angle BAD = 8^2\sin 60° = 64 \times \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}$ (см²).

3) $\triangle ABD$ – рівносторонній, $BD = AB = 8$ см.



Мал. 8.8

4) У $\triangle ABC$: $\angle ABC = 120°$. За теоремою косинусів:
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$;
$AC = \sqrt{8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8^2 \cdot \cos 120°} = 8\sqrt{3}$ (см).
5) Оскільки $BD < AC$, то B_1D – менша діагональ паралелепіпеда, $B_1D = AC = 8\sqrt{3}$ см.
6) У $\triangle BB_1D$ ($\angle B = 90°$):
$BB_1 = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 - 8^2} = 8\sqrt{2}$ (см).
7) Тоді об'єм $V = 32\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{2} = 256\sqrt{6}$ (см^3).
Відповідь. $256\sqrt{6}$ см^3.

Домашнє завдання: розв'язати задачі (у зошиті):

1) Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 4 см і 16 см, а діагональ більшої за площею бічної грані дорівнює 40 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
2) Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 см, 3 см і 4,5 см. Знайдіть ребро куба, об'єм якого дорівнює об'єму даного паралелепіпеда.

Зворотній зв'язок:
E-mail t.anastasia.igorivna@gmail.com