

03.11.2023

Група 23

Математика (геометрія)

Урок 11-12

Тема: Розв'язування задач з теми: «Скалярний добуток векторів».

Підготовка до контрольної роботи №1 «Координати і вектори».

Мета:

- Повторити теоретичний матеріал; узагальнити, систематизувати та поглибити знання учнів із теми; застосувати математичні знання під час розв'язування прикладних задач; формувати просторову уяву;
- розвивати в учнів пізнавальний інтерес, уміння використовувати набуті знання, навички й уміння в нових ситуаціях; підвищити інтерес до вивчення математики; розвивати абстрактне та логічне мислення;
- виховувати у учнів повагу та зацікавленість до вивчення математики, старанність у навчанні; сприяти розширенню кругозору учнів.

Матеріали до уроку:

42.3.° Знайдіть скалярний добуток векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , якщо:

1)  $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\vec{b}| = 5$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ ;

2)  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 7$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$ .

1)  $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\vec{b}| = 5$ ,  $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 30^\circ$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\sqrt{3} \cdot 5 \cdot \cos 30^\circ = 10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot 3 = 15.$$

2)  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 7$ ,  $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 135^\circ$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 7 \cdot \cos 135^\circ = 4 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -28\frac{\sqrt{2}}{2} = -14\sqrt{2}.$$

42.5.° Знайдіть скалярний добуток векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , якщо:

1)  $\vec{a} (1; -2; 3)$ ,  $\vec{b} (2; -4; 3)$ ;

2)  $\vec{a} (-9; 4; 5)$ ,  $\vec{b} (3; -1; 4)$ .

1)  $\vec{a} (1; -2; 3)$ ,  $\vec{b} (2; -4; 3)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-4) + 3 \cdot 3 = 2 + 8 + 9 = 19$$

2)  $\vec{a} (-9; 4; 5)$ ,  $\vec{b} (3; -1; 4)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -9 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 = -27 - 4 + 20 = -11$$

42.7.° Дано вектори  $\vec{m} (3; -2; 4)$  і  $\vec{n} (2; 2; z)$ . При якому значенні  $z$  виконується рівність  $\vec{m} \cdot \vec{n} = 18$ ?

$$\vec{m} (3; -2; 4), \vec{n} (2; 2; z), \vec{m} \cdot \vec{n} = 18, z = ?$$

$$3 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + 4z = 18$$

$$6 - 4 + 4z = 18 \quad 4z = 16$$

$$2 + 4z = 18 \quad z = \frac{16}{4}$$

$$4z = 18 - 2 \quad z = 4$$

42.9.° Серед векторів  $\vec{a} (1; 1; 2)$ ,  $\vec{b} (1; 2; 1)$  і  $\vec{c} (-5; 3; 1)$  укажіть пару перпендикулярних векторів.

$$\vec{a} (1; 1; 2), \vec{b} (1; 2; 1), \vec{c} (-5; 3; 1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 + 2 = 5$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = -5 + 6 + 1 = 2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \cdot (-5) + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = -5 + 3 + 2 = 0 \text{ — перпендикулярні.}$$

42.10.° Кут між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  дорівнює  $45^\circ$ ,  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$ .

Знайдіть:

1)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ ;      2)  $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}$ ;      3)  $(\vec{a} - \vec{b})^2$ .

$$\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ, |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 3\sqrt{2}$$

$$1) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) + |\vec{b}|^2 =$$

$$= 3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ + (3\sqrt{2})^2 = 9\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 9 \cdot 2 = \frac{9 \cdot 2}{2} + \frac{18}{1} =$$

$$= \frac{18 + 36}{2} = \frac{54}{2} = 27$$

$$2) (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 2\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{a} = 2 \cdot |\vec{a}|^2 - |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \angle(\vec{b}; \vec{a}) =$$

$$= 2 \cdot 3^2 - 3\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos 45^\circ = 18 - 9\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{18 \cdot 2}{2} - \frac{18}{2} = \frac{36 - 18}{2} = 9$$

$$3) (\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ + (3\sqrt{2})^2 =$$

$$= 9 - 18\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 9 \cdot 2 = 9 - 18 + 18 = 9$$

42.12.° Кут між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  дорівнює  $120^\circ$ ,  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ . Обчисліть скалярний добуток  $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 7\vec{b})$ .

$$\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 120^\circ, |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1.$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 7\vec{b}) &= 4|\vec{a}|^2 - 7\vec{a} \cdot \vec{b} + 12\vec{a} \cdot \vec{b} - 21|\vec{b}|^2 = \\ &= 4|\vec{a}|^2 + 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 21|\vec{b}|^2 = 4 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ - 21 \cdot 1^2 = \\ &= 4 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 21 = -17 - 2,5 = -19,5. \end{aligned}$$

42.14.\* При якому значенні  $x$  вектори  $\vec{a}(x; -x; 1)$  і  $\vec{b}(x; 2; 1)$  перпендикулярні?

$$\vec{a}(x; -x; 1), \vec{b}(x; 2; 1), \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

$$x \cdot x + (-x) \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases} \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

$$\vec{a}(1; -1; 1), \vec{b}(1; 2; 1).$$

42.16.\* Знайдіть скалярний добуток  $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$ , якщо  $\vec{a}(2; -1; -2)$ ,  $\vec{b}(4; -3; 2)$ .

$$(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b}) = ?, \vec{a}(2; -1; -2), \vec{b}(4; -3; 2).$$

$$\begin{aligned} (2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b}) &= 2|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{a} \cdot \vec{b} + 6|\vec{b}|^2 = \\ &= 2|\vec{a}|^2 - 7\vec{a} \cdot \vec{b} + 6|\vec{b}|^2. \end{aligned}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29}.$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^2 - 7(2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) + (-2) \cdot 2) + 6 \cdot (\sqrt{29})^2 &= 18 - 7(8 + 3 - 4) + \\ + 6 \cdot 29 &= 18 - 49 + 174 = 143 \end{aligned}$$

### Варіант 0

1. (1 бал) Обрати точки, які належать осі  $Ox$ .

- 1)  $(-3; 0; 0)$ ; 2)  $(0; -3; 0)$ ; 3)  $(0; 0; -3)$ ; 4)  $(-3; -3; -3)$ ; 5)  $(0; 1; 0)$ .

Якщо точка належить осі  $Ox$ , то координати на осях  $Oy$  та  $Oz$  дорівнюють нулю. Отже, це може бути лише точка 1)  $(-3; 0; 0)$ .

2. (1 бал) Відносно якої з даних точок симетричні точки  $A(8; -5; 3)$  і  $B(0; 1; -9)$ ?

- 1)  $C(8; -4; -6)$ ; 2)  $D(4; -3; 6)$ ; 3)  $E(-8; 6; -12)$ ; 4)  $F(4; -2; -3)$ .

Якщо  $A$  і  $B$  симетричні відносно деякої точки, то ця точка буде серединою відрізка  $AB$ .

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$
$$x = \frac{8 + 0}{2} = 4 \quad y = \frac{-5 + 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad z = \frac{3 - 9}{2} = -3$$

3. (1 бал) Укажіть вектор, колінеарний вектору  $\vec{a}(2; -1; -3)$ .

- 1)  $\vec{b}(6; -3; 9)$ ; 2)  $\vec{c}(2; -1; -3)$ ; 3)  $\vec{d}(-4; 2; 6)$ ; 4)  $\vec{e}(0; -2; -6)$ ;  
5)  $\vec{f}(6; 0; 0)$ .

Якщо  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , то  $\frac{2}{6} = \frac{-1}{-3} = \frac{-3}{9}$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \checkmark$$

Отже,  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .

4. (1 бал) Знайдіть відстань між точками  $A(-2; 3; 1)$  і  $B(0; 1; 2)$ .

$$A(-2; 3; 1), B(0; 1; 2)$$

$$|AB| = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (1 - 3)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3.$$

5. (1 бал) Точка  $A$  – середина відрізка  $CD$ ,  $A(-2; 1; 3)$ ,  $C(2; -5; 1)$ . Знайдіть координати точки  $D$ .

$$A(-2; 1; 3), C(2; -5; 1), D(x_2; y_2; z_2).$$

$$x = \frac{2+x_2}{2} = -2 \quad y = \frac{-5+y_2}{2} = 1 \quad z = \frac{1+z_2}{2} = 3$$

$$2+x_2 = -4 \quad -5+y_2 = 2 \quad 1+z_2 = 6$$

$$x_2 = -4-2 \quad y_2 = 2+5 \quad z_2 = 6-1$$

$$x_2 = -6 \quad y_2 = 7 \quad z_2 = 5$$

$$D(-6; 7; 5)$$

6. (2 бали) Модуль вектора  $\vec{a}(x; -3; 6)$  дорівнює 7. Знайдіть  $x$ .

$$\vec{a}(x; -3; 6), |\vec{a}| = 7.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + (-3)^2 + 6^2} = 7^2$$

$$x^2 + 9 + 36 = 49$$

$$x^2 + 45 = 49$$

$$x^2 = 49 - 45$$

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$$

$$\vec{a}(2; -3; 6) \text{ або } \vec{a}(-2; -3; 6).$$

7. (2 бали) Дано вектори  $\vec{a}(0; y; -3)$  та  $\vec{b}(-2; 3; 0)$ . Знайдіть  $y$ , якщо відомо, що вектори  $a$  і  $b$  – перпендикулярні.

$\vec{a}(0; y; -3), \vec{b}(-2; 3; 0), \vec{a} \perp \vec{b}$ .  
Якщо  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot (-2) + 3 \cdot y + 0 \cdot (-3) = 0$$

$$0 + 3y + 0 = 0$$

$$3y = 0$$

$$y = 0$$

$$\vec{a}(0; 0; -3).$$

Додаткове завдання (одне на вибір).

8(1). (3 бали) На осі абсцис знайдіть усі точки, відстань від яких до точки  $M(-2; 3; 4)$  дорівнює 7.

$M(-2; 3; 4), N(x; y; z), |MN| = 7$ .

Якщо  $N \in Oz$ , то координати  $x$  та  $y$  дорівнюють 0. Покі  $N(0; 0; z)$ .

$$|MN| = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (0 - 3)^2 + (z - 4)^2} = 7$$

$$4 + 9 + z^2 - 8z + 16 = 49$$

$$z^2 - 8z - 20 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20) = 64 + 80 = 144$$

$$z_1 = \frac{8 - \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{8 - 12}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$z_2 = \frac{8 + \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{8 + 12}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Отже,  $N_1(0; 0; -2), N_2(0; 0; 10)$ .

8(2). (3 бали) Дано точки  $A(0; -1; 2), B(3; 4; -1), C(x; y; z), D(4; -1; 3)$ .  
Знайдіть  $x, y, z$ , якщо  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

$$A(0; -1; 2), B(3; 4; -1), C(x; y; z), D(4; -1; 3).$$

$$\overrightarrow{AB}(3-0; 4-(-1); -1-2) = \overrightarrow{AB}(3; 5; -3).$$

Якщо  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ , то  $\overrightarrow{CD}(3; 5; -3)$ .

$$\overrightarrow{CD}(4-x; -1-y; 3-z).$$

$$C(1; -6; 6).$$

$$\begin{array}{l} 4-x=3 \\ -x=3-4 \\ -x=-1 \\ x=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} -1-y=5 \\ -y=5+1 \\ -y=6 \\ y=-6 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3-z=-3 \\ -2=-3-3 \\ -z=-6 \\ z=6 \end{array}$$

8(3). (3 бали) Дано вектори  $\vec{c}(0; 0; -2)$  і  $\vec{d}(0; 1; 1)$ . Знайдіть (у градусах) кут між даними векторами.

$$\vec{c}(0; 0; -2), \vec{d}(0; 1; 1).$$

Якщо  $\vec{c} \cdot \vec{d} = |\vec{c}| |\vec{d}| \cos \angle(\vec{c}; \vec{d})$ , то

$$\cos \angle(\vec{c}; \vec{d}) = \frac{|\vec{c}| |\vec{d}|}{\vec{c} \cdot \vec{d}}.$$

Оскільки

$$|\vec{c}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \text{ то}$$

$$\cos \angle(\vec{c}; \vec{d}) = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 1} = \frac{\sqrt{4}}{0 + 0 - 2} = -\frac{2}{2} = -1$$

Отже,  $\angle(\vec{c}; \vec{d}) = 180^\circ$ .

Домашнє завдання: розв'язати задачі (в зошиті):

- 1) Дано вектори  $\vec{a}(x; -1; 3)$  і  $\vec{b}(3; 2; -2)$ . При якому значенні  $x$  справджується рівність  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ ?
- 2) Чи перпендикулярні вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , якщо:
  - 1)  $\vec{a}(-1; 2; 3), \vec{b}(4; -1; 2)$ ;      2)  $\vec{a}(2; -3; 0), \vec{b}(6; -4; 5)$ ?

**Зворотній зв'язок:**

**E-mail** [t.anastasia.igorivna@gmail.com](mailto:t.anastasia.igorivna@gmail.com)