02.11.

Група 33

Математика (алгебра,

Урок 21-22

Тема: Визначений інтеграл. Його геометричний зміст.

Мета:

- *Навчальна:* засвоїти означення площі криволінійної трапеції, навчитися знаходити площу криволінійної трапеції; розглянути означення визначеного інтеграла та навчитися знаходити визначений інтеграл; засвоїти формулу Ньютона-Лейбніца та розглянути геометричний зміст визначеного інтеграла;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння знаходити площу криволінійної трапеції та визначений інтеграл, логічне мислення;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; вміння правильно висловлювати свою думку.

Матеріали до уроку:

- Пригадаємо таблицю первісних

Функція $f(x)$	**Первісна $F(x)$**	
a	$\boldsymbol{ax+C}$	a – стала
x^p	$\boldsymbol{\frac{x^{p+1}}{p+1}+C}$	$p \neq -1$
$ax+b$	$\boldsymbol{\frac{ax^2}{2}+bx+C}$	
$\sqrt{x}$	$\boldsymbol{\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C}$	
$\sin x$	$\boldsymbol{-\cos x+C}$	
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\boldsymbol{-\mathrm{ctg}\, x+C}$	$x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
$\cos x$	$\boldsymbol{\sin x+C}$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\boldsymbol{\mathrm{tg}\, x+C}$	$x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

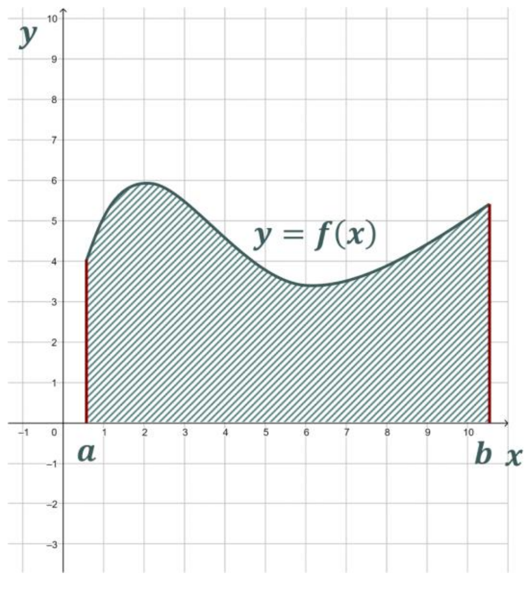
I. Вивчення нового матеріалу

- **Криволінійна трапеція**

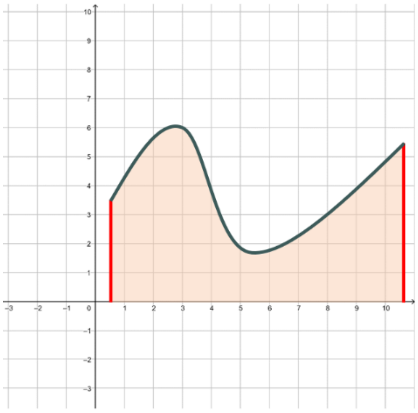
Означення

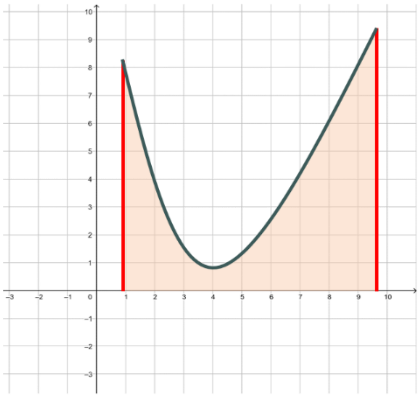
Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на проміжку $[a;b]$ і $y=f(x)\geq 0$, то фігура, обмежена графіком функції f і прямими $y=0, x=a$ і $x=b$, називається ***криволінійною трапецією***.

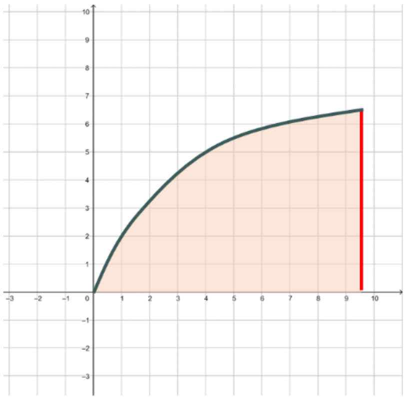
**Відрізок $[a;b]$ – це основа криволінійної трапеції.*



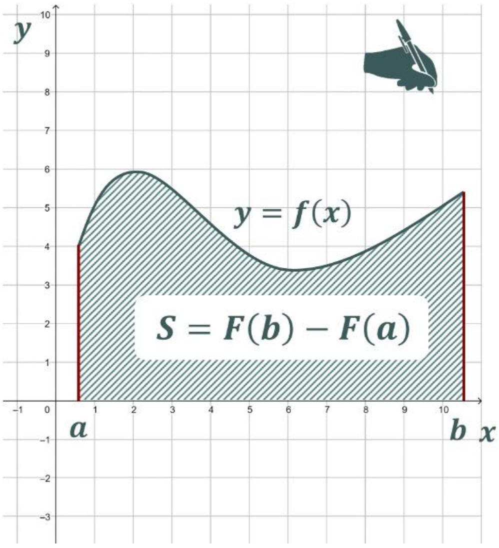
Приклади криволінійних трапецій:







- **Площа криволінійної трапеції**



Теорема

Площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і прямими $y = 0$, $x = a$ *і* $x = b$ $(a < b)$, можна обчислити за формулою $S = F(b) - F(a)$, де F будь-яка первісна функції f на проміжку $[a; b]$

Наприклад:

Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої відрізками $a = 1,\ b = 3$, віссю Ox і графіком функці $f(x) = 6x - x^2$.

Розв'язання:

- Назвіть одну з первісних ф-ї $f(x) = 6x - x^2$ на проміжку $[1; 3]$

$$F(x) = \frac{6x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = 3x^2 - \dfrac{x^3}{3} \\ S = F(b) - F(a) \end{array}\right| \Rightarrow \boldsymbol{S = F(3) - F(1)}$$

$$S = F(3) - F(1) = \left(3 \cdot 3^2 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(3 \cdot 1^2 - \frac{1^3}{3}\right) = 18 - \frac{8}{3} = \frac{46}{3} = 15\frac{1}{3}$$

- **Формула Ньютона-Лейбніца**

Означення

Нехай F – первісна функції f на проміжку I, числа a і b $(a < b)$, належать проміжку I. Різницю $F(b) - F(a)$ називають **визначеним інтегралом** функції f на проміжку $[a; b]$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Позначення $\int_a^b f(x)dx$ *читається як інтеграл від* a *до* b *еф від ікс де ікс.*

Числа a і b *– це межі інтегрування:* a *– нижня межа,* b *– верхня межа.*

**Отримана рівність називається формулою Ньютона-Лейбніца*

- **Геометричний зміст визначеного інтеграла**
  Використовуючи теорему про площу криволінійної трапеції та формулу Ньютона-Лейбніца можна зробити висновок, що площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної і невід'ємної на відрізку $[a; b]$ *функції* $y = f(x)$*, відрізком* $[a; b]$ *осі* Ox *і прямими* $x = a$ *і* $x = b$*, можна обчислювати за формулою*

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

- Сформулюйте теорему про площу криволінійної трапеції
  $S = F(b) - F(a)$
- Сформулюйте формулу Ньютона-Лейбніца
  $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
- Який можемо зробити висновок?

$$\left.\begin{array}{c} S = F(b) - F(a) \\ \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \end{array}\right| \Rightarrow S = \int_a^b f(x)dx$$

Ця формула виражає геометричний зміст визначеного інтеграла.

- **Обчислення визначеного інтеграла**

1. Знайти будь-яку первісну F функції f на проміжку $[a; b]$;
2. Обчислити значення первісної F у точках $x = b$ і $x = a$;
3. Знайти різницю $F(b) - F(a)$;

Виконуючи обчислення визначених інтегралів зручно використовувати такий запис:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Наприклад:

Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої відрізками $a = -\frac{2\pi}{3}$, $b = \frac{\pi}{2}$, віссю Ox і графіком функції $f(x) = \cos\frac{x}{2}$

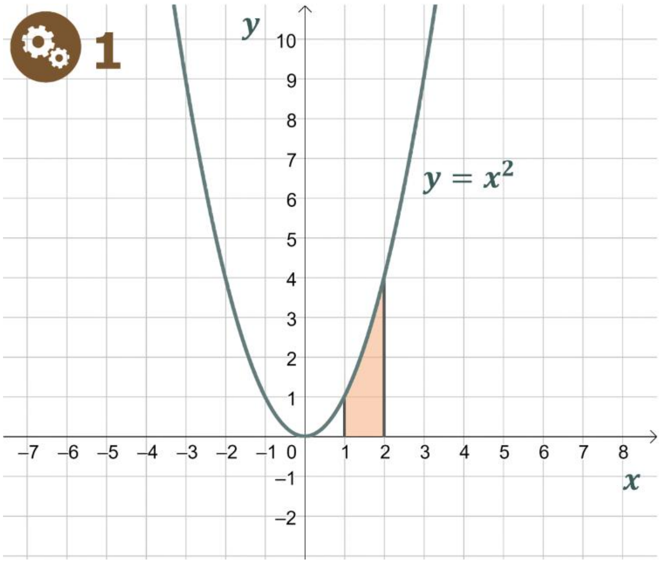
Розв'язання:

$$S = \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{2}\,dx = 2\sin\frac{x}{2}\Big|_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sin\frac{\pi}{4} - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

ІІ. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Знайдіть площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунку:



Маємо криволінійну трапецію, яка обмежена графіком функції $y = x^2$ і прямими $a = 1$ і $b = 2$.

Знайдемо первісну:

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

За теоремою про площу криволінійної трапеції знайдемо площу:

$$S = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}\ (\text{кв.од})$$

№2

Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int_{5}^{7} x\,dx$

2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

3) $\int_{-2}^{3} 3^x\,dx$

Розв'язання:

1) $$\int_{5}^{7} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_5^7 = \frac{7^2}{2} - \frac{5^2}{2} = \frac{49}{2} - \frac{25}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

2) $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\,\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \sqrt{3} - 1$$

3) $$\int_{-2}^{3} 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3}\Big|_{-2}^{3} = \frac{3^3}{\ln 3} - \frac{3^{-2}}{\ln 3} = \frac{27 - \frac{1}{9}}{\ln 3} = \frac{26\frac{8}{9}}{\ln 3} = \frac{242}{9\ln 3}$$

№3 Обчисліть визначений інтеграл:

$$\mathbf{1)}\ \int_{-4}^{-2} (2x+4)dx$$

$$\mathbf{2)}\ \int_{1}^{3} (4x^3-4x+3)dx$$

Розв'язання:

1) $$\int_{-4}^{-2} (2x+4)dx = \left(\frac{2x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_{-4}^{-2} = (x^2+4x)\Big|_{-4}^{-2}$$
$$= \left((-2)^2+4\cdot(-2)\right)-\left((-4)^2+4\cdot(-4)\right) = 4-8-16+16 = -4$$

2) $$\int_{1}^{3} (4x^3-4x+3)dx = \left(\frac{4x^4}{4}-\frac{4x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_{1}^{3} = (x^4-2x^2+3x)\Big|_{1}^{3}$$
$$= (3^4-2\cdot3^2+3\cdot3)-(1^4-2\cdot1^2+3\cdot1) = 81-18+9-1+2-3$$
$$= 70$$

III. Домашнє завдання

Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія.Рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — 2019.
Опрацювати у підручнику ст.58-60.
Виконати №278,284

Зворотній зв'язок
E-mail: **vitasergiivna1992@gmail.com**